وزارة التعليم العالي

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

رسالة ماجستير في الرياضيات التطبيقية اختصاص ميكانيك رياضي

" دراسة في نظريتي لورد – شولمان (L- S) و غرين – ليندسي (G- L) في الترموديناميك المعمم للأجسام الصلبة "

" A study in Lord _ Shulman (L – s) Green _ Lindsay (G – L) Theories of Generalized Thermodynamics of Elastic Solids "

اعداد الطالب : علاء احمد خلوف.

بإشراف الدكتور : منتجب الحسن.

العام الدراسي: **2020/2019**

الفهرس:

الفصل الصفري:

مقدمة في ميكانيك الجسم الصلب ص 7

الفصل الأول:

أساسيات المرونة الحرارية الخطية مع سرعات موجة محدودة ص41

الفصل الثاني:

أساسيات المرونة الحرارية مع وقت استرخاء واحد ص 63

الفصل الثالث:

أساسيات المرونة الحرارية مع زمني استرخاء ص 76

هدف الرسالة:

- ❖ استنتاج معادلات الترموديناميك المعمم الأول بزمن استرخاء واحد؛ أي معادلات نظرية (L–S) للأجسام الصلبة.
- ❖ استنتاج معادلات الترموديناميك المعمم الثاني بزمني استرخاء؛ أي معادلات نظرية (G–L) للأجسام الصلبة.
- ❖ تعميم مبرهنات ترموديناميك Fourier ، للأجسام الصلبة ، إلى نظريتي (L–S) و(G–L) ، للأجسام الصلبة.
- ❖ مناقشة أسهل طرق حل مسائل للأجسام الصلبة ضمن كلٍ منهما .

مقدمة :

قبل إعطاء الموضوع حقه من حيث التغطية التاريخية، تظهر أمامنا الأسئلة الخمسة المُلحَّة التالية: أولاً) ما هو علم الترموديناميك التقليدي؟ ، ثانياً) ما هي نظرية الأجسام الصلبة؟ ، ثالثا) ما هي نظرية الأجسام الصلبة، والمترابطة بمعنى Fourier مع حقل درجات حرارة؟. رابعاً) ما هي نظرية الأجسام الصلبة، والمترابطة بمعنى Maxwell و Cattaneo مع حقل درجات حرارة؟ خامساً) ما هي نظرية الأجسام الصلبة، والمترابطة مع حقل درجات حرارة، بمعنى أعم عن المعنى السابق. فيما يلي سنجيب وبشكلٍ مختصر عن كلٍ من الأسئلة الخمسة، المذكورة أعلاه. 1) الترموديناميك (Thermodynamics): هو فرع الميكانيك الاحصائي، الذي يدرس تحول الطاقة الحرارية لنظام فيزيائي (أي لوسط مادي) من شكلها الحراري إلى طاقة أخرى كالطاقة الميكانيكية، وبالعكس، وذلك اعتماداً على نظريات وقوانين الترموديناميك.

2)النظرية التقليدية للأجسام الصلبة: هي فرع الميكانيك التقليدي، الذي يهتم بالأوساط المستمرة من النوع المرن ومهملة البنية الجزيئية، والتي تكون انفعالاتها المرنة لامتناهية في الصغر، الأمر الذي يجعل العلاقات التي تحكم هذه الأجسام الصلبة، خطية بالمعنيين الجبري والتفاضلي.3) نظرية الأجسام الصلبة، المترابطة بمعنى Fourier، مع الحرارة: هي العلم الذي يدرس العلاقات المتبادلة بين الحقول الميكانيكية ممثلةً بالانفعالات المرنة، مع حقل درجات الحرارة، معتمدين في ذلك قوانين ونظريات الترموديناميك، القائمة على قانون Fourier في التوصيل الحراري، حيث معادلة التوصيل الحراري هنا من النمط المكافئ. 4)نظرية الأجسام الصلبة، المتربطة بمعنى Maxwell و Cattaneo، مع الحرارة: هي العلم الذي يدرس العلاقات المتبادلة بين الحقول الميكانيكية ممثلةً بالانفعالات المرنة، مع حقل درجات الحرارة، معتمدين في ذلك قانون Maxwell– Cattaneo في التوصيل الحراري، حيث معادلة التوصيل الحراري هنا من النمط الزائدي النظامي.

5) نظرية الأجسام الصلبة، المترابطة بمعنى Green و Lindsay ، مع الحرارة: هي العلم الذي يدرس العلاقات المتبادلة بين الحقول الميكانيكية ممثلةً بالانفعالات المرنة، مع حقل درجات الحرارة، معتمدين في ذلك تعميم قانون Maxwell– Cattaneo في التوصيل الحراري، حيث معادلة التوصيل الحراري هنا من النمط الزائدي العام غير النظامي.

فيما يلي سنعرض تاريخياً كل جانب من الجوانب الخمسة السابقة:

أولاً) في عام 1807 ، وضع الفيزيائي الفرنسي Joseph Fourier أول قانون في التوصيل الحراري بشكله التفاضلي، لأجل وسط متساوي خواص المرونة، حيث يربط هذا القانون التدفق الحراري بتدرج درجات الحرارة. وفي عام 1824،لاحظ الفيزيائي الفرنسي Sadi Carnot ، تحول الطاقة الحرارية، من حرارية إلى تحريرية، وذلك في آلة بخارية، سميت فيما بعد بآلة Carnot.حيث وضع هذا الباحث الأساس للقانون الثاني في الترموديناميك.

بعدها جاء الباحث الألماني Julius Mayer ليضع عام 1841 قانون انحفاظ الطاقة الكلية في نظام فيزيائي مغلق، والذي عرف فيما بعد بالقانون الأول في الترموديناميك. وفي عام 1854، خرج الباحث الألماني Rudolf Clausius، مفهوم جديد يدعى الانتروبيا(Entropy) أعطى من خلاله صيغة القانون الثاني في الترموديناميك، رابطاً في ذلك أفكار أسلافه. بعدها جاء الباحث Ludwig Boltzman (1844– 1906)، ليصيغ الانتروبيا بطريق يسهل تصورها، على أنها مقياس لعدم انتظام نظام فيزيائي، وأنه في نظام فيزيائي مغلق، يحدث فيه تغيير عكوسي للحالة، فإنه في هذا النظام ينعدم فرق الانتروبيا ما بين الحالة البدائية والحالة النهائية. هكذا وبخطوات سريعة تم وضع باقي قوانين الترموديناميك من خلال باحثين فيزيائيين وكيميائيين مهمين، لا يقلون أهميةً عن الباحثين المذكورين أعلاه، لكن من أجل الإيجاز، سوف لن نذكرهم من حيث بالأسماء والأعمال وتواريخها. وفي أربعينيات وخمسينيات القرن العشرين أخذ قانون Fourier في التوصيل الحراري شكله الأعم الحالي، لأجل نظام فيزيائي مختلف خواص المرونة (Anisotropic Physical System).

ثانياً) أسس الباحث الفيزيائي والرياضي Hooke في منتصف القرن التاسع عشر، النموذج الرياضي، لأبسط الأجسام المرنة، مهملة البنية الجزيئية، والموصوفة بمعاملين ماديين. وسمي هذا الجسم فيما بعد بجسم Hookeالمرن، وفي نهاية القرن التاسع عشر (عام 1887)أتى الباحث الألماني Voigt ليأسس نموذجاً رياضياً لجسم مرن أعم، آخذاً بعين الاعتبار البنية الجزيئية للجسم المرن، هكذا حتى نهاية القرن التاسع عشر، الذي لم ينته بجديد في هذا المجال.

ثالثاً) أما مطلع القرن العشرين، فقد أتى بالشيء الجديد في هذا المجال، حيث قدم الباحثان الفرنسيان، الإخوان Cosserat في عام 1909، قدموا النظرية العامة في الأوساط المستمرة، حيث سميت هذه النظرية فيما بعد باسمهما. أخذت هذه النظرية بعين الاعتبار، ترابط الحقول الميكانيكية ممثلةً بالانفعالات، مع حقول أخرى متعددة، منها حقل درجات الحرارة.

لكن وللأسف لم يقدر العالم قيمة هذه النظرية، وأُهملت لفترة طويلة، حتى نهاية أربعينيات، وبداية خمسينيات القرن العشرين، حيث أدرك الباحثين في مجال الأوساط المستمرة، القيمة الكبيرة التي تمثلها نظرية Cosserat في الأوساط المستمرة، حيث

أصبحت هذه النظرية المبدأ لقيام نظريات أخرى مشتقة منها؛ أي نقطة الانطلاق لمناقشة نماذج رياضية لأوساط مستمرة محددة، يأخذ فيها بعين الاعتبار التأثير المتبادل بين الحقول الميكانيكية، ممثلتاً بالانفعالات مع حقول أخرى. يُذكر من هؤلاء الباحثين: الأميركي Sneddon، الجورجي Kupradse، النمساوي Parkus، والتركي Eringen، والبولنديان: Drobot وNowacki ، وغيرهم. فقد قام هؤلاء ومنذ منتصف القرن العشرين، قاموا بمناقشة التأثير المتبادل مابين الحقول الميكانيكية، مع حقول أخرى، منها الحقل الحراري، وبمعنىFourier ،و ذلك في إطار نظرية الأجسام الصلبة، التي هي احدى النظريات المشتقة من نظرية Cosserat في الأوساط المستمرة، فدرسوا بعض الطرق التحليلية لحل مسائل القيم الحدية والابتدائية التي تحكم سلوك الجسم الصلب في إطار هذه النظرية المترابطة مع بمعنى Fourier مع الحقل الحراري. إن الترموديناميك التقليدي، القائم على قانون Fourier في التوصيل الحراري، غير كافي في العديد من المسائل، للتعبير عن سلوك الحقول الفيزيائية التي تصف مسألة الجسم الصلب. الأمر الذي دفع البحث العلمي في الثلاثين سنة الأخيرة للبحث عن ترموديناميك جديد، أعم وأقوى من الكلاسيكي، وبحيث يصف دوماً وبشكل كامل السلوك المذكور للجسم الصلب. ويمكن وصف هذا التطور للترموديناميك من خلال المرحلتين المهمتين، والمتتاليتين التاليتين.

رابعاً)نظرية الأجسام الصلبة المتربطة مع الحرارة من نمط ***Lord – Shulman***:

التي طورها الباحثان Lord و Shulman بالاعتماد على قانون Maxwell-Cattaneo في التوصيل الحراري، حيث معادلة التوصيل الحراري من النمط الزائدي النظامي، وتسمى هذه النظرية بنظرية الترموديناميك المعمم للأجسام الصلبة، بزمن استراحة واحد.

خامساً)نظرية الأجسام الصلبة المتربطة مع الحرارة من نمط ***Green– Lindsay***:

التي طورها الباحثان Green وLindsay بالاعتماد على تعميم قانون Maxwell- Cattaneo في التوصيل الحراري، حيث معادلة التوصيل الحراري من النمط الزائدي غير النظامي، وتسمى هذه النظرية بنظرية الترموديناميك المعمم للأجسام الصلبة، بزمني استراحة.

الفصل الصفري:

مقدمة في ميكانيك الجسم للجسم الصلب

معادلات الاستمرار بالكتلة الحجمية:

لتكن $ox_1x_2x_3$ جملة إحداثية ديكارتية , قائمة , قاعدتها (e_1,e_2,e_3) , وعطالية , ولتكن $p \equiv (x_1,x_2,x_3)$ نقطة لاغرانجية من جسم مرن , و التي في اللحظة $t>0$ تصبح النقطة المادية الأولرية $p' \equiv (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ عندئذٍ يكون

$$\zeta_i = \zeta_i(x_1,x_2,x_3;t) \qquad ;i=1,2,3 \qquad (1)$$

إن العلاقة (1) تصور لنا شكل الجسم في اللحظة $t>0$, كما أن هذه الدوال يجب أن تكون مستمرة و وحيدة القيم من أجل كل $t>0$, كما أن المعين اليعقوبي لها :

$$\frac{D(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{D(x_1,x_2,x_3)} := \left|\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(p;t)\right| \neq 0 \quad ; \quad \forall p, \forall t>0$$

فيما يلي سندرس سرعة و تسارع النقطة المادية p' , المعطى مسارها بالعلاقة (1) في وصف لاغرانج لدينا :

$$V_i(p,t) = \frac{\partial \zeta_i}{\partial t}(p;t) \qquad (2)$$

$$a_i(p;t) = V_i^{\bullet}(p;t) = \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial t}(p;t) \qquad (3)$$

وفي العلاقتين السابقتين تتم عملية الاشتقاق جزئياً بالنسبة للزمن t ؛ أي باعتبار

$;i=1,2,3$ x_i مقادير ثابتة .

أما في وصف أولر , الذي يصف الجسم المرن بدلالة p' و t, فإن :

$$V_i(p';t) = \frac{d\zeta_i}{dt} \tag{4}$$

بالتالي :

$$a_i(p';t) = \frac{dV_i}{dt}(p';t) = \frac{\partial V_i}{\partial \zeta_j}(p';t)\frac{d\zeta_j}{dt} + \frac{\partial V_i}{\partial t}(p';t)$$

إذا رمزنا ب $\frac{d}{dt} = \frac{D}{Dt}$ و بما أن $\frac{d\zeta_j}{dt} = V_j(p';t)$, فيصبح لدينا :

$$\left.\begin{aligned} a_i(p';t) = \frac{DV_i}{Dt}(p';t) &= \frac{\partial V_i}{\partial \zeta_j}(p';t)V_j(p';t) + \frac{\partial V_i}{\partial t}(p';t) \\ &= \frac{\partial V_i}{\partial t}(p';t) + \frac{\partial V_i}{\partial \zeta_j}(p';t)V_j(p';t) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ندعو $\frac{DV_i}{Dt}(p';t)$ بالمشتق المادي ل $V_i(p';t)$, حيث ندعو :

$V_j(p';t)\frac{\partial V_i}{\partial \zeta_j}(p';t)$ بالحد المتمم.

و يمكن تعميم المشتق المادي ليشمل أي تابع حقيقي أولري :

$F(p';t)$ يصف وسط مادي مستمر , ذلك كما يلي :

$$\left.\begin{aligned} \frac{DF}{Dt}(p';t) &= \frac{\partial F}{\partial t}(p';t)\bigg|_{p'=const} + V_j(p';t)\frac{\partial F}{\partial \zeta_j}(p';t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(p;t)\bigg|_{p=const} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

إن المشتق المادي المذكور أعلاه , كما هو الحال بالنسبة للمشتق العادي , فهو يحقق خواص المشتق العادي :

$$\begin{cases} \dfrac{D}{Dt}(F+G)=\dfrac{DF}{Dt}+\dfrac{DG}{Dt} \\ \dfrac{D}{Dt}(\lambda F)=\lambda\dfrac{DF}{Dt} \\ \dfrac{D}{Dt}(FG)=F\dfrac{DG}{Dt}+G\dfrac{DF}{Dt} \end{cases} \tag{7}$$

فيما يلي و من أجل مناقشة معادلات الاستمرار و معادلات الحركة لجسم مرن , يلزمنا حساب المشتق المادي لتكامل حجمي من الشكل :

$$B(t)=\int_V F(p';t)dV(p')$$

حيث V حجماً مادياً أولرياً , مأخوذا من الجسم المرن في اللحظة $t>0$, V محاط بالسطح المغلق A , $dV(p')$ عنصراً حجمياً تفاضلياً من V, و $F(p';t)$ تابعاً فيزيائياً أولرياً يصف لنا الجسم المرن .

نميز عندئذٍ الحالتين التاليتين :

إذا كان الحجم V لا يتغير بتغير الزمن t,وكانت الدوال $F(p';t)$ و $\dfrac{\partial F}{\partial t}(p';t)$ مستمرة في V من أجل جميع قيم $t>0$, عندئذٍ يكون :

$$\frac{D}{Dt}\int_V F(p';t)dV(p')=\int_V \frac{\partial F}{\partial t}(p';t)dV(p') \tag{8}$$

أما إذا كان الحجم V يتغير بتغير الزمن t , عندئذٍ علينا أن نضيف إلى الطرف الأيمن ل (8) حداً إضافياً ناشئ عن كون V يتبع للزمن ,هذا الحد الإضافي هو :

$$\int_A F(p';t)n_i V_i(p';t)dA(p') \tag{9}$$

حيث $\vec{n} = n_i \vec{e}_i$ هو متجه واحدة ناظم السطح A في النقطة المادية الأولرية p' من A و $dA(p')$ عنصر سطح تفاضلي من A , و $dA(p')$ يحوي النقطة المادية الأولرية p' .

و نشير هنا إلى أن $\vec{n}$ موجه نحو خارج V.

و بذلك يصبح المشتق المادي ل $B(t)$ بالشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\int_V F(p';t)dV(p') = \frac{\partial F}{\partial t}(p';t)dV(p') + \\ + \int_A F(p';t)n_i V_i(p';t)dA(p')\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ولكن باستخدام مبرهنة غوص , فإن (9) تصبح بالشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned}&\int_A F(p';t)n_i V_i(p';t)dA(p') = \\ &\qquad \int_V div\left[F(p';t)V_i(p';t)\vec{e}_i\right]dV(p') \\ &\qquad = \int_V \frac{\partial}{\partial \zeta_i}\left[F(p';t)V_i(p';t)\right]dV(p') \\ &\qquad = \int_V F(p';t)\frac{\partial V_i}{\partial \zeta_i}(p';t)dV(p') \\ &\qquad\quad + \int_V V_i(p';t)\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}(p';t)dV(p')\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

و بتعويض (11) في (10) نحصل على :

$$\frac{D}{Dt}\int_V F(p';t)dV(p') = \int_V \left[\frac{\partial F}{\partial t}(p';t) + V_j(p';t)\frac{\partial F}{\partial \zeta_j}(p';t) + \right.$$

$$\left. + F(p';t)\frac{\partial V_j}{\partial \zeta_j}(p';t) \right] dV(p')$$

وبما أن :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(p';t) + V_j(p';t)\frac{\partial F}{\partial \zeta_j}(p';t) = \frac{DF}{Dt}(p';t)$$

فيصبح بذلك المشتق المادي للتكامل بالشكل التالي :

$$\frac{D}{Dt}\int_V F(p';t)dV(p') = \int_V \left[\frac{DF}{Dt}(p';t) + \right.$$

$$\left. + F(p';t)\frac{\partial V_j}{\partial \zeta_j}(p';t) \right] dV(p') \qquad (12)$$

لنرمز الآن ب $\rho(p';t)$ للكثافة الحجمية للجسم المرن في اللحظة $t > 0$, وفي النقطة المادية الأولرية p' و ب $\rho_0(p)$ للكثافة الحجمية لهذا الجسم في النقطة المادية اللاغرانجية p و اللحظة $t > 0$.

إن العلاقة مابين هاتين الدالتين تمثل لنا مبدأ انحفاظ الكتلة للجسم (أو لجسم منه) , و التي تقول أن كتلة الجسم (أو كتلة جزء منه) لا تتغير أثناء الحركة .

بالتالي فإن العلاقة التالية ستكون صحيحة من أجل أي جزء V من الجسم كتلته M و شكله البدائي V_0 :

$$M = \int_V \rho(p';t)d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = \int_{V_0} \rho_0(p)dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (13)$$

و بالانتقال الآن , من الإحداثيات ζ_i إلى الإحداثيات x_i , نجد :

$$\int_V \rho(p';t)d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 = \int_{V_0} \rho(p';t)\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j}(p;t)\right| dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (14)$$

حيث هنا $\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j}(p;t)\right|$ هو المعين اليعقوبي للتحويلات (1).

من (13) و (14) نجد :

$$\int_{V_0} \rho(p';t)\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j}(p;t)\right| dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{V_0} \rho_0(p)dx_1 dx_2 dx_3 \qquad (15)$$

و هذا الكلام صحيح أياً كان الجزء V_0 من الجسم المرن , في اللحظة $t > 0$ و ينتج عن ذلك أن :

$$\rho_0(p) = \rho(p';t)\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j}(p;t)\right| \quad ;\forall p \in B; \text{ الشكل البدائي للجسم } B \qquad (16)$$

و بما أن العلاقات (1) تعطينا تفاضلاً بين مجموعة النقاط المادية p و مجموعة النقاط المادية P' , ف, فإن :

$$\left|\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j}(p;t)\right|^{-1} = \left|\frac{\partial x_i}{\partial \zeta_j}(p';t)\right|$$

بذلك تصبح العلاقة الأخيرة (16) بالشكل التالي :

$$\rho(p';t) = \rho_0(p)\left|\frac{\partial x_i}{\partial \zeta_j}(p';t)\right| \quad ; \quad \forall p \in B, \forall p' \in B'$$

$$\forall t > 0 \tag{17}$$

و لنعتبر الآن المساواة الأولى التالية في (13):

$$M = \int_V \rho(p';t)dV(p') \tag{18}$$

إن قانون انحفاظ الكتلة يقتضي أن يكون:

$$\frac{DM}{Dt} = 0$$

و إذا استخدمنا الآن العلاقة (12) , فإننا نجد أن :

$$\frac{DM}{Dt} = \int_V \left[\frac{D\rho}{Dt}(p';t) + \rho(p';t)\frac{\partial V_j}{\partial \zeta_j}(p';t)\right]dV(p') = 0 \tag{19}$$

و المساواة السابقة محققة أياً كان الجزء V من الجسم في اللحظة $t > 0$ عندئذٍ إذا كان التابع المكامل في (19) مستمراً , فإن ذلك يقتضي أن :

$$\frac{D\rho}{Dt}(p';t) + \rho(p';t)\frac{\partial V_j}{\partial \zeta_j}(p';t) = 0 \quad ; \quad \forall p' \in B', \forall t > 0$$

أو

$$\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial V_j}{\partial \zeta_j} = 0 \tag{20}$$

و بما أن

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_j\frac{\partial \rho}{\partial \zeta_j}$$

فإن (20) تصبح بالشكل التالي :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \zeta_j}(\rho V_j)=0 \qquad (21)$$

المعادلة (20) أو (21) تدعى معادلة الاستمرار .

من أجل مسائل التوازن تتحول كل من هاتين المعادلتين إلى مطابقة لأنه في حالة السكون يكون : $V_j=0$ و كذلك $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$.

و لنلاحظ أن المعادلتان (16) و (17) و كذلك المعادلتان (20) و (21) تعبران عن نفس مضمون مبدأ انحفاظ الكتلة .

المعادلتان (16) و (17) تدعيان بمعادلتا الاستمرار الماديتان , أما المعادلتان (20) و (21) تدعيان بمعادلتا استمرار التتبع .

المعادلتان (16) و(17) تستخدمان في ميكانيك الجسم الصلب , أما المعادلتان (20) و(21) تستخدمان في ميكانيك الموائع .

معادلات الحركة :

معادلات الحركة للجسم المرن , يمكن الحصول عليها من مبدأين أساسيين في الميكانيك ؛ هما مبدأ انحفاظ كمية الحركة , ومبدأ انحفاظ عزم كمية الحركة لجزء V من الجسم المرن .

فإذا كان V حجماً اختيارياً من الجسم المرن , مأخوذاً في اللحظة $t>0$, و محاطاً بالسطح المغلق A وكان $\vec{n}(p')=n_i\vec{e}_i$ متجه واحدة ناظم السطح A في النقطة المادية الأولرية $p'\in A$, فإنه يُعبر عندئذٍ عن مركبات كمية الحركة :

$$\mathcal{P}_i=\int_V \rho(p';t)V_i(p';t)dV(p') \quad ; \quad i=1,2,3 \qquad (1)$$

و حيث : $dV(p') = d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$

إن مبدأ انحفاظ كمية الحركة للجزء V في اللحظة $t > 0$ يعبر عنه وفقاً لوصف أولر , أي بواسطة ζ_i $(i = 1,2,3)$ و $t > 0$, و ذلك وفقاً للعلاقة :

$$\frac{D\mathcal{P}_i}{Dt} = \int_V X_i(p';t)dV(p') + \int_A P_i^{(n)}(p';t)dA(p') \qquad (2)$$

حيث هنا :

$X_i(p';t)$ مركبات القوة الحجمية المؤثرة في $dV(p')$ و $p_i^{(n)}(p';t)$ مركبات القوة السطحية المؤثرة بالجزء السطحي $dA(p')$ حيث متجه واحدة الناظم الخارجي هو $\vec{n}(p')$

.إن العلاقة (2) تقول أن تغير كمية حركة الجزء V , بالنسبة للزمن , يساوي حاصلة القوى المؤثرة ب V , حيث أن حاصلة القوى المؤثرة ب V هي حاصلة القوى الحجمية X_i المؤثرة في كل الحجم المأخوذ V , مضافاً إلى ذلك حاصلة القوى السطحية المؤثرة بالسطح A المحيط ب V .

لكن نعلم أن المركبات $p_i^{(n)}$ تعطى ب :

$$p_i^{(n)}(p';t) = \sigma_{ji}(p';t)n_j(p') \quad ; \quad \forall p' \in B' \ , \ \forall t > 0$$

و بذلك تصبح (2) بالشكل :

$$\frac{D\mathcal{P}_i}{Dt} \int_V X_i(p';t)dV(p') + \int_A \sigma_{ji}(p';t)n_j(p')dA(p') \qquad (3)$$

و باستخدام مبرهنة غوص , فإن التكامل السطحي الموجود في (3) , يكتب بالشكل التالي :

$$\int_A \sigma_{ji}(p';t)n_j(p')dA(p') = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \zeta_j}(p';t)dV(p') \tag{4}$$

و تصبح بذلك (3) بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &= \int_V X_i(p';t)dV(p') + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \zeta_i}(p';t)dV(p') \\ &= \int_V \left[X_i(p';t) + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \zeta_j}(p';t) \right] dV(p') \end{aligned} \tag{5}$$

هذا من جهة أولى , و من جهة أخرى بأخذ المشتق V المادي لطرفي العلاقة (1) نجد:

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &= \frac{D}{Dt}\int_V \rho(p';t)V_i(p';t)dV(p') \\ &= \int_V \left[\frac{\partial(\rho \upsilon_i)}{\partial t}(p';t) + \frac{\partial(\rho \upsilon_i \upsilon_j)}{\partial \zeta_j}(p';t) \right] dV(p') \end{aligned} \tag{6}$$

من (5) و (6) , نجد :

$$\begin{aligned}&\int_V \left[\frac{\partial(\rho \upsilon_i)}{\partial t}(p';t) + \frac{\partial(\rho \upsilon_i \upsilon_j)}{\partial \zeta_j}(p';t) \right] dV(p') = \\ &= \int_V \left[X_i(p';t) + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \zeta_j}(p';t) \right] dV(p') \end{aligned} \tag{7}$$

و إذا فرضنا هنا أن التوابع المكاملة مستمرة بالنسبة للنقاط p' , فينتج عن ذلك و عن كون أن V جزء اختياري من الجسم المرن , مأخوذ في اللحظة $t > 0$ أن :

$$\frac{\partial(\rho\upsilon_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\upsilon_i\upsilon_j)}{\partial\zeta_j} = X_i + \frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial\zeta_j} \tag{8}$$

إن المعادلة (8) يمكن أن تخضع إلى بعض الاختصارات بسبب معادلة الاستمرار :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\upsilon_j)}{\partial\zeta_j} = 0 \tag{9}$$

و لنلاحظ الآن أن الطرف الأيسر ل (8) يكتب بمساعدة (9) بالشكل :

$$\frac{\partial(\rho\upsilon_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\upsilon_i\upsilon_j)}{\partial\zeta_j} = \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\upsilon_j)}{\partial\zeta_j}\right]\upsilon_i + \\ + \rho\left[\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} + \frac{\partial\upsilon_i}{\partial\zeta_j}\upsilon_j\right] = 0 + \rho\frac{D\upsilon_i}{\partial t}$$

و تصبح بذلك (8) بالشكل التالي :

$$\rho\frac{D\upsilon_i}{Dt} = X_i + \frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial\zeta_i} \tag{10}$$

إن المعادلة (8) تمثل لنا الشكل المحلي لمبدأ انحفاظ كمية الحركة في الجسم المرن أما مبدأ انحفاظ العزم الحركي في الجسم المرن فله الشكل التالي بالنسبة لجزء اختياري V من الجسم المرن هذا :

$$\frac{D\mathcal{M}_i}{Dt} = M_i \quad ; \qquad (i = 1,2,3) \tag{11}$$

حيث :

$$\mathcal{m}_i = \int_V \rho(p';t) e_{ijk} \zeta_j V_k(p';t) dV(p') \qquad (12)$$

و

$$M_i = \int_V e_{ijk} \zeta_j X_k(p';t) dV(p') + \\ + \int_A e_{ijk} \zeta_j p_k^{(n)}(p';t) dA(p') \qquad (13)$$

إن مضمون المبدأ (11) هو التالي .

التغير الزمني للعزم الحركي للجزء V من الجسم المرن , يساوي العزم الحاصل للقوى الحجمية المؤثرة في V مضافاً إلى ذلك العزم الحاصل للقوى السطحية المؤثرة في A و التي مصدرها خارج A (الجزء المتبقي من الجسم).

ولنوجد الآن معادلة حركة الجسم , و التي تنتج عن مبدأ انحفاظ العزم الحركي (11) – (13) .

من جهة أولى لدينا :

$$\frac{D\mathcal{M}_i}{Dt} = \int_V \left[\frac{D}{Dt}(\rho e_{ijk}\zeta_j V_k) + (\rho e_{ijk}\zeta_j V_k)\frac{\partial V_\ell}{\partial \zeta_\ell} \right] dV(p')$$

$$= \int_V e_{ijk}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\zeta_j V_k) + V_\ell \frac{\partial}{\partial \zeta_\ell}(\rho\zeta_j V_k) + \rho\zeta_j V_k \frac{\partial V_\ell}{\partial \zeta_\ell} \right] dV(p')$$

$$= \int_V e_{ijk}\left[\zeta_j \frac{\partial}{\partial t}(\rho V_k) + \frac{\partial}{\partial \zeta_\ell}(\rho\zeta_j V_k V_\ell) \right] dV(p')$$

$$= \int_V e_{ijk}\left[\zeta_j \frac{\partial}{\partial t}(\rho V_k) + \zeta_i \frac{\partial}{\partial \zeta_\ell}(\rho V_k V_\ell) + \rho V_k V_\ell \delta_{j\ell} \right] dV(p')$$

$$\Rightarrow \frac{D\mathcal{M}i}{Dt} = \int_V e_{ijk}\left[\zeta_j \frac{\partial}{\partial t}(\rho \upsilon_k) + \zeta_j \frac{\partial}{\partial \zeta_\ell}(\rho V_k V_\ell) + \rho V_j V_k \right] dV(p')$$

أو

$$\frac{D\mathcal{M}_i}{Dt} = \int_V e_{ijk}\zeta_j \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \upsilon_k) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\rho V_k V\ ) \right] dV(p') \qquad (14)$$

في العلاقة السابقة استخدمنا المساواة :

$$e_{ijk}V_j V_k = 0 \quad , \quad i = 1,2,3$$

و من جهة ثانية لدينا :

$$M_i = \int_V e_{ijk}\zeta_j X_k \quad dV(p') + \int_A e_{ijk}\zeta_j p_k^{(n)}(p';t)dA(p')$$

و بما أن :

$$p_k^{(n)} = \sigma_{lk}(p';t)n_l(p') \quad ; \quad \forall p' \in B' \ , \forall t > 0$$

فتصبح بذلك العلاقة بالشكل التالي :

$$M_i = \int_V e_{ijk}\zeta_j X_k \quad dV(p') + \int_A e_{ijk}\zeta_j \sigma_{lk} n_l \quad dA(p') \tag{15}$$

سنستخدم الآن مبرهنة غوص في تحويل التكامل السطحي السابق , من تكامل سطحي على A إلى تكامل حجمي على V . لدينا :

$$\begin{aligned}\int_A e_{ijk}\zeta_j \sigma_{lk} n_l \quad dA(p') &= \int_V \frac{\partial}{\partial \zeta_l}(e_{ijk}\zeta_j \sigma_{lk})dV(p') \\ &= \int_V e_{ijk}\frac{\partial}{\partial \zeta_l}(\zeta_j \sigma_{lk})dV(p') \\ &= \int_V e_{ijk}(\delta_{jl}\sigma_{lk} + \zeta_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial \zeta_l})dV(p')\end{aligned}$$

بالتالي :

$$\begin{aligned}\int_A e_{ijk}\zeta_j \sigma_{lk} n_l \quad dA(p') &= \int_V e_{ijk}\zeta_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial \zeta_l} \quad dV(p') \\ &\quad + \int_V e_{ijk}\sigma_{jk} \quad dV(p')\end{aligned} \tag{16}$$

ينتج الآن من (11) و (14) و(15) و (16) , أي ينتج من مبدأ انحفاظ العزم الحركي للجزء V من الجسم المرن , أن :

$$\int_V e_{ijk}\zeta_j\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\upsilon_k)+\frac{\partial}{\partial\zeta_l}(\rho\upsilon_k\upsilon_l)\right]dV(p')=\int_V e_{ijk}\zeta_j X_k \quad dV(p')+$$

$$+\int_V e_{ijk}\zeta_j\frac{\partial\sigma_{lk}}{\partial\zeta_l} \quad dV(p')+\int_V e_{ijk}\sigma_{jk} \quad dV(p')$$

و الذي يكتب بحسب خواص التكامل الحجمي بالشكل التالي :

$$\int_V e_{ijk}\zeta_j\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\upsilon_k)+\frac{\partial}{\partial\zeta_l}(\rho\upsilon_k\upsilon_l)-X_k-\frac{\partial\sigma_{lk}}{\partial\zeta_l}\right]dV(p')$$

$$=\int_V e_{ijk}\sigma_{jk} \quad dV(p') \qquad (17)$$

و لكن بحسب (8) فإن :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\upsilon_k)+\frac{\partial}{\partial\zeta_l}(\rho\upsilon_k\upsilon_l)-X_k-\frac{\partial\sigma_{lk}}{\partial\zeta_l}=0$$

و بذلك تصبح (17) بالشكل :

$$\int_V e_{ijk}\sigma_{jk} \quad dV(p')=0 \qquad (18)$$

و ينتج عن (18) و عن كون V جزء اختياري من الجسم في اللحظة $t>0$, أن :

$$e_{ijk}\sigma_{jk} \quad dV(p')=0 \qquad ; \quad \forall p'\in B', \forall t>0$$

$$, \forall i=1,2,3 \qquad (19)$$

و ينتج الآن عن (19) و عن خواص مناوب ليفي _ تشيفتي , أن :

$$\sigma_{jk} = \sigma_{lk} \quad ; \quad \forall p' \in B' \ , \forall t > 0 \ , \forall l, k = 1,2,3$$

و الذي يعتبر مصفوفة الإجهادات هي مصفوفة متناظرة .

عند استنتاج معادلات الحركة السابقة (8) أو (10) و(19) , استخدمنا في ذلك وصف أولر الذي يصف الجسم بالنقاط المادية الأولرية p' , و بالزمن $t > 0$.

و هنا نلاحظ أن بنية معادلات الحركة المحصول عليها (المعادلات (10) و (15))

أسهل بكثير فيما لو كان الوصف المستخدم هو وصف لاغرانج . و لكن في وصف أولر تظهر بعض المصاعب , ففي مسائل نظرية المرونة غير الخطية , و المعروفة (أي المسائل) باسم مسائل مواضع النقاط البدائية , التي يتطلب فيها تعيين حقل الإزاحات الناتج عن انفعالات الجسم في لحظة البدء , و التي فيها أيضاً الشروط الحدية معطاة على شكل الحمول الحجمية أو على شكل الإزاحات , و التي يعبر عنها بشكل أسهل باستخدام الإحداثيات اللاغرانجية x_i , وبالتالي هذه المسائل ستكون أسهل للمناقشة أو الحل فيما كانت معادلات الحركة تعتمد وصف لاغرانج .

والمصاعب الأخرى في المعادلات (7) تكمن أيضاً بأن الاشتقاق الجزئي في هذه المعادلات يتم بالنسبة ل ζ_i , التي تحتوي ضمناً على الدوال المجهولة التي نبحث عنها و التي هي الإزاحات .

من معادلات حركة الجسم المرن في وصف أولر (أي من المعادلات (10) و (15)) يمكن بسهولة أن نصل إلى معادلات الحركة للجسم المرن في إطار النظرية الخطية للمرونة , التي فيها تكون الانفعالات صغيرة و سرع الإزاحات أيضاً صغيرة .

و لنأخذ الآن العلاقة التي تعطينا مصفوفة الانفعالات الأولرية $\{\eta_{ij}\}_{3\times3}$, في النظرية اللاخطية للمرونة . إن هذه العلاقات تملك الشكل التالي :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \zeta_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \zeta_i} - \frac{\partial u_k}{\partial \zeta_i}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial \zeta_j}\right) \tag{20}$$

و لنجعل الآن هذه العلاقات خطية ذلك بإهمال الحد غير الخطي $\frac{\partial u_k}{\partial \zeta_i}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial \zeta_j}$

حيث نجد :

$$\eta_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \zeta_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \zeta_i}\right)$$

بما أنه عندما تكون الانفعالات صغيرة , فإن الاشتقاق الجزئي بالنسبة ل ζ_i يختلف عن الاشتقاق الجزئي بالنسبة ل x_i بمقادير صغيرة جداً , لذلك سنعبر عن الانفعالات من خلال مركبات تنسور الانفعالات اللاغرانجية والصغيرة :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{21}$$

و إذا أتينا الآن إلى معادلات الحركة (10) , فإنه من أجل الانفعالات الصغيرة و سرع الإزاحات الصغيرة فإن الحدود غير الخطية في المشتق المادي الموجود في الطرف الأيسر لهذه المعادلات، يمكن إهمالها بالنسبة لباقي حدود هذا المشتق المادي , حيث يصح هذا المشتق المادي بالشكل :

$$\frac{DV_i}{Dt}(p';t) = \frac{\partial U_i}{\partial t}(p';t) = \frac{\partial U_i}{\partial t}(p;t) \tag{22}$$

بالتالي فإن معادلات الحركة (10) , تأخذ الشكل التالي في إطار المرونة الخطية :

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}(p;t) + X_i(p;t) = \rho_0(p)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(p;t) \qquad (23)$$

ومن أجل الخارجية المستقلة عن الزمن , فإن المعادلات (23) تأخذ الشكل التالي:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}(p) + X_i(p) = 0 \qquad (24)$$

والتي تدعى بمعادلات توازن الجسم المرن في إطار المرونة الخطية.

معادلات توافق الانفعالات اللاغرانجية اللامتناهية في الصغر بطريقة سيزار الهندسية التقليدية

من أجل متطلبات هذا البند ، تلزمنا المبرهنة التالية

مبرهنة ستوكس :

إذا كان $\sum$ سطحاً في المنطقة بسيطة الترابط C_0 وفرضنا أن Γ منحنياً محيطاً بالسطح $\sum$ وكان $\vec{n}$ متجه واحدة ناظم السطح $\sum$ في النقطة P من $\sum$ والموجه نحو خارج $\sum$. وإذا فرضنا أيضاً أن :

$$\vec{F} : \Sigma \to R^3$$

$$P \to \vec{F}(P)$$

دالة متجهية من الصف C^0 في $\Sigma \cup \Gamma$ ، والصف C^1 في Σ ، فإنه عندئذ يكون:

أ) التكاملان التاليان موجودان : المنحني $\int_{\Gamma} \overrightarrow{F}.\, d\vec{r}$ ، حيث $\vec{r} = \overrightarrow{op}$ ،

والسطحي $\int_{\Sigma} \vec{n}.\overrightarrow{rot}\vec{F}\; d\Sigma$.

ب) تتحقق علاقة ستوكس التالية : $\int_{\Gamma} \overrightarrow{F}.d\vec{r} = \int_{\Sigma} \vec{n}.\overrightarrow{rot}\vec{F}\; d\Sigma$.

لنعد الآن إلى موضوعنا الأساسي، الذي هو دراسة معادلات توافق الانفعالات لجسم المرن ذي الانفعالات اللامتناهية في الصغر، بالطريقة الهندسية التقليدية، وفي النظام الاحداثي الديكارتي.

اذاً في هذه الفقرة سنفرض أن الجسم المرن ذي انفعالات صغيرة جداً , وعندئذ تصبح المركبات اللاغرانجية لتنسور الانفعال في النظام الإحداثي الديكارتي بالشكل:

$$\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad ; \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (1)$$

في ميكانيك الأوساط المستمرة , نفرض أن الدوال u_i من الصف C^1 في المنطقة بسيطة الترابط (اللاغرانجية) C_0 ، وأن الشرط التالي محقق :

$$D(P;t) := \left| s_{ij} + u_{i,j}(p;t) \right| \neq 0 \quad ; \quad \forall P \equiv (x_1, x_2, x_3) \in C_0$$
$$\forall t > 0$$

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو التالي:

هل ضمن تحقق الشرط السابق , يمكن أن تكون الدوال ε_{ij} اختيارية أم هناك روابط فيما بينها ؟ والجواب على هذا السؤال هو التالي:

الدوال ε_{ij} لا يمكن أن تكون اختيارية , نظراً لما يلي. من أجل حساب المركبات u_i لمتجه الإزاحة $\vec{u}$ ، نستخدم العلاقات (1) التي هي ستة علاقات . فإذا فرضنا في (1) أن ε_{ij} معاليم و u_i مجاهيل , فتصبح (1) ستة معادلات مستقلة بثلاثة مجاهيل ، هي المركبات u_i لمتجه الإزاحة $\vec{u}$. وإذا كانت التوابع ε_{ij} في هذه الحالة اختيارية , لا نحصل عندئذ على حل وحيد u_i للجملة المذكورة. إذن , من المفروض أن نتوقع أن تحقق الدوال الست ε_{ij} شروطاً إضافية , حتى يكون لجملة المعادلات (1) حلاً وحيداً u_i .

في الحالة العامة , الدوال ε_{ij} , كل منها يتغير بتغير النقطة $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$ وبتغير الزمن t . فكل عنصر حجمي من الجسم المرن ينتقل بشكل مستقل , ولو كانت الانفعالات ε_{ij} غير مرتبطة مع بعضها البعض , أي مستقلة فإن العناصر الحجمية من الجسم المرن التي تقترب من بعضها البعض قبل الانفعال لتشكل الجسم , لا يمكن أن تقترب من بعضها أثناء الانفعال لتشكل هذا الجسم .

إن الشروط الإضافية المذكورة التي تربط الانفعالات الست ε_{ij} فيما بينها والمسماة شروط الاستمرار المطبقة على الانفعالات , تم إعطاؤها بالطريقة الهندسية التقليدية بواسطة الباحث ساينت فيستانا

فيما يلي لنوجد هذه العلاقات المسماة شروط الاستمرار المطبقة على الانفعالات , بطريقة ي – سيزار [5] وذلك بالطريقة الهندسية التقليدية.

في كل لحظة $t > 0$, نفرض أن الدوال ε_{ij} مستمرة في C_0 وتملك مشتقات جزئية بالنسبة لـ x_i حتى المرتبة الثانية مستمرة في C_0 , أي لنفرض أن هذه الدوال من الصف C^2 في C_0. وبناءاً على (3) علينا أن نفرض أن الدوال u_i من الصف C^3 في C_0.

ولنختار الآن نقطتان لاغرانجيتان اختياريتان $P_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $P_1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ من المنطقة بسيطة الترابط (اللاغرانجية) C_0 , ولنرمز عندئذ بـ $u_i^0(P_0;t)$ للإزاحات وبـ $\omega_{ij}^0(P_0;t)$ للدورانات في النقطة P_0 واللحظة $t > 0$, ولنفرض أيضاً أن المقادير السابقة u_i^0 و ω_{ij}^0 معطاة . ولنرمز أيضاً بـ $u_i^1(P_1;t)$ لمركبات متجه الإزاحة في النقطة P_1 واللحظة $t > 0$. وعندئذٍ ، لتحديد وحدانية الإزاحات $u_i^1(P_1;t)$ نستخدم كما ذكرنا طريقة ي – سيزار [5] التالية.

إن $u_i^1(P_1;t)$ يعطى وفقاً للتكامل التالي:

$$u_j^1(P_1;t) = u_j^0(P_0;t) + \int_{P_0}^{P_1} du_j = u_j^0(p_0;t) + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(P;t)dx_k$$

$$= u_j^0(P_0;t) + \int_{P_0}^{P_1} u_{j,k}(P;t)dx_k$$

أو اختصاراً نكتب:

$$u_j^1 = u_j^0 + \int_{P_0}^{P_1} u_{j,k} dx_k \tag{2}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{j,k} &= \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j}) + \frac{1}{2}(u_{j,k} - u_{k,j}) \\ &= \varepsilon_{jk} + \omega_{jk} \end{aligned} \tag{3}$$

وبالتعويض في (2) نجد:

$$u_j^1 = u_j^0 + \int_{P_0}^{P_1} (\varepsilon_{jk} + \omega_{jk}) dx_k$$

باستخدام خواص التكامل نجد :

$$u_j^1 = u_j^0 + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_{jk} dx_k + \int_{P_0}^{P_1} \omega_{jk} dx_k \tag{4}$$

وإذا ما كاملنا التكامل الأخير في (4) : $\int_{P_0}^{P_1} \omega_{jk} dx_k$ ، بطريقة التجزئة نجد:

$$\int_{P_0}^{P_1} \omega_{jk} dx_k = [x_k \omega_{jk}(p;t)]_{P_0}^{P_1} - \int_{P_0}^{P_1} x_k d\omega_{jk}$$

أي:

$$\int_{P_0}^{P_1} \omega_{jk} dx_k = x_k^1 \omega_{jk}^1 - x_k^0 \omega_{jk}^0 - \int_{P_0}^{P_1} x_k d\omega_{jk}$$

وبإضافة وطرح $x_k^1 \omega_{jk}^0$ ، للطرف الأيمن نجد:

$$\int_{P_0}^{P_1} \omega_{jk} dx_k = (x_k^1 - x_k^0)\omega_{jk}^0 + x_k^1(\omega_{jk}^1 - \omega_{jk}^0) - \int_{P_0}^{P_1} x_k d\omega_{jk} \quad (5$$

وبما أن:

$$x_k^1(\omega_{jk}^1 - \omega_{jk}^0) = \int_{P_0}^{P_1} x_k^1 d\omega_{jk}$$

فتصبح (5) ، بعد استخدام خواص التكامل بالشكل:

$$\int_{P_0}^{P_1} \omega_{jk} dx_k = (x_k^1 - x_k^0)\omega_{jk}^0 + \int_{P_0}^{P_1} (x_k^1 - x_k) d\omega_{jk} \quad (6)$$

وبما أن: $d\omega_{jk} = \omega_{jk,l} dx_l$ ، فتصبح (6) بالشكل:

$$\int_{P_0}^{P_1} \omega_{jk} dx_k = (x_k^1 - x_k^0)\omega_{jk}^0 + \int_{P_0}^{P_1} (x_k^1 - x_k)\omega_{jk,l} dx_l \quad (7)$$

الآن نعوض (7) في (4) ، فنجد:

$$u_j^1 = u_j^0 + (x_k^1 - x_k^0)\omega_{jk}^0 + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_{jk} dx_k + \int_{P_0}^{P_1} (x_k^1 - x_k)\omega_{jk,l} dx_l$$

وباستخدام خواص التكامل , نجد أن العلاقة السابقة تكتب بالشكل:

$$u_j^1 = u_j^0 + (x_k^1 - x_k^0)\omega_{jk}^0 + \int_{P_0}^{P_1} [\varepsilon_{jl} + (x_k^1 - x_k)\omega_{jk,l}]dx_l$$

وبما أن العلاقة التالية محققة دوماً :

$$\omega_{jk,l} = \varepsilon_{lj,k} - \varepsilon_{kl,j}$$

فيصبح التكامل السابق بالشكل:

$$u_j^1 = u_j^0 + (x_k^1 - x_k^0)\omega_{jk}^0 + \int_{P_0}^{P_1} [\varepsilon_{jl} + (x_k^1 - x_k)(\varepsilon_{lj,k} - \varepsilon_{kl,j})]dx_l$$

وإذا فرضنا أن:

$$U_{jl} = \varepsilon_{jl} + (x_k^1 - x_k)(\varepsilon_{lj,k} - \varepsilon_{kl,j})$$

فيصبح التكامل بالشكل:

$$u_j^1 = u_j^0 + (x_k^1 - x_k^0)\omega_{jk}^0 + \int_{P_0}^{P_1} U_{jl} dx_l$$

أو:

$$u_j^1 = u_j^0 + (x_k^1 - x_k^0)\omega_{jk}^0 + \int_{P_0}^{P_1} U_{jr} dx_r \qquad (8)$$

حيث:

$$U_{jr} = \varepsilon_{jr} + (x_k^1 - x_k)(\varepsilon_{rj,k} - \varepsilon_{kr,j}) \qquad (9)$$

وباستخدام الخاصة التوزيعية التالية لمركبات تنسور ليفي – تشيفتي في النظام ألإحداثي الديكارتي : $\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lsm} = \delta_{js}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{ks}$

يمكن أن نكتب:

$$(x_k^1 - x_k)(\varepsilon_{rj,k} - \varepsilon_{kr,j}) = \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lsm}(x_k^1 - x_k)\varepsilon_{rs,m}$$

وبذلك تصبح (9) بالشكل:

$$U_{jr} = \varepsilon_{jr} + \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lsm}(x_k^1 - x_k)\varepsilon_{rs,m} \qquad (10)$$

الآن نقول , الإزاحات u_j^1 تكون وحيدة , إذا وفقط إذا كان التكامل الموجود في (10) مستقل عن طريق التكامل الذي يصل P_0 بـ P_1 , إذ أن هناك عدة طرق تصل P_0 بـ P_1 . فإذا اخترنا الطريق في C_0 على أنه منحنٍ مغلق Γ يخرج من P_0 ليصل إلى P_1 ثم يعود من P_1 إلى P_0 وعلى نحوٍ يكون فيه هذا المنحني محيطاً لسطح $\sum$ يقع في C_0 , لكان:

$$\int_\Gamma U_{jr}\,dx_r = 0 \qquad (11)$$

(كون أن Γ طريقاً مغلقاً تقع عليه P_0 , P_1)

وباستخدام مبرهنة ستوكس السابقة , لنحسب التكامل السابق $\int_\Gamma U_{jr}\,dx_r$.

فإذا فرضنا أن: $\vec{F}^{j} = U_{jr}\vec{e}_r$ ،عندئذ يصبح لدينا:

$$U_{jr}\, dx_r = \vec{F}^{j}.\, d\vec{r}$$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\int_{\Gamma} U_{jr}\, dx_r = \int_{\Gamma} \vec{F}^{j}.\, d\vec{r}$$

وباستخدام مبرهنة ستوكس السابقة , يصبح التكامل السابق بالشكل:

$$\int_{\Gamma} U_{jr}\, dx_r = \int_{\Gamma} \vec{F}^{j}.\, d\vec{r} = \int_{\sum} \vec{n}.\overrightarrow{rot}\vec{F}^{j} d\sum \qquad (12)$$

وبما أن: $\overrightarrow{rot}\,\vec{F}^{j} = \varepsilon_{pnr}\, F^{j}_{r,n}\vec{e}_p$

حيث: $\vec{F}^{j} = F^{j}_{r}\vec{e}_r$

فإن: $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{rot}\,\vec{F}^{j} = n_P\, \varepsilon_{pnr}\, F^{j}_{r,n}$

حيث: $\vec{n} = n_P\vec{e}_P$

ولدينا: $F^{j}_{r} = U_{jr}$

وبالتالي يصبح لدينا:

$$\vec{n}\,.\overrightarrow{rot}\,\vec{F}^{j} = \varepsilon_{pnr}\, F^{j}_{r,n} n_P = \varepsilon_{pnr}\, U_{jr,n} n_P$$

نعوض في (12) ، ونستفيد من كون أن : $\int_{\Gamma} U_{jr}\, dx_r = 0$ ، فنجد أن:

$$0 = \int_{\Gamma} U_{jr}\, dx_r = \int_{\sum} \varepsilon_{pnr} U_{jr,n}\, n_P\, d\sum \qquad (14)$$

وبما أن السطح $\sum$ اختياري في C_0 , فأن (14) تتحقق إذا وفقط إذا كانت العلاقة التالية محققة في C_0:

$$\varepsilon_{pnr} U_{jr,n} = 0 \qquad (15)$$

وباستخدام (10) ,تصبح (15) بالشكل:

$$\varepsilon_{pnr}[\varepsilon_{jr,n} - \varepsilon_{jnl}\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,m} + \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lsm}(x_k^1 - x_k)\varepsilon_{rs,mn}] = 0 \qquad (16)$$

وباستخدام العلاقة التوزيعية:

$$\varepsilon_{jnl}\varepsilon_{lsm} = \delta_{js}\delta_{nm} - \delta_{jm}\delta_{ns}$$

تصبح (16) بالشكل:

$$\varepsilon_{pnr}[\varepsilon_{jr,n} - (\varepsilon_{rj,n} - \varepsilon_{rn,j})] + \\ + \varepsilon_{jkl}(x_k^1 - x_k)\varepsilon_{pnr}\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn} = 0 \qquad (17)$$

إن الحد الأول يطابق الصفر , وبذلك يصبح الشرط اللازم والكافي لانعدام الحد الثاني, وبالتالي لانعدام الطرف الأيسر لـ (17)،هو تحقق العلاقة التالية في C_0 , لأجل كل $(x_k^1 - x_k)$:

$$\varepsilon_{pnr}\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn} = 0 \qquad (18)$$

في العلاقة (18) هناك دليلين حرين فقط هما l, P . إذاً في الحالة العامة فهي تعطي 9 علاقات. وبما أن هناك تناظر بالنسبة لـ l, P، فإن هذه العلاقة المصفوفية السابقة مبدئياً تعطينا ستة معادلات مستقلة من أجل القيم التالية لـ l, P:

$$Pl = 11, 22, 33, 12, 13, 23$$

ولنوجد الآن هذه المعادلات الست المذكورة.

باستخدام علاقة التوزيع الشهيرة التالية:

$$\varepsilon_{pnr}\varepsilon_{lsm} = \begin{vmatrix} \delta_{pl} & \delta_{ps} & \delta_{pm} \\ \delta_{nl} & \delta_{ns} & \delta_{nm} \\ \delta_{rl} & \delta_{rs} & \delta_{rm} \end{vmatrix} =$$

$$= \delta_{pl}(\delta_{ns}\delta_{rm} - \delta_{nm}\delta_{rs}) +$$
$$+ \delta_{ps}(\delta_{nm}\delta_{rl} - \delta_{nl}\delta_{rm}) +$$
$$+ \delta_{pm}(\delta_{nl}\delta_{rs} - \delta_{ns}\delta_{rl})$$

وباستخدام خاصة التصفية بديلتا كرونيكا، نجد أن (18)، تأخذ الشكل التالي:

$$\delta_{pl}(\varepsilon_{mn,mn} - \varepsilon_{mm,nn}) + \varepsilon_{pl,mm} - \varepsilon_{pm,ml} +$$
$$+ \varepsilon_{mm,pl} - \varepsilon_{ln,pn} = 0 \qquad (19)$$

فمن أجل قيم p و l المتساوية، تأخذ العلاقة السابقة الشكل التالي:

$$\varepsilon_{mn,mn} - \varepsilon_{mm,nn} + \varepsilon_{pp,mm} - \varepsilon_{pm,pm} +$$
$$+ \varepsilon_{mm,pp} - \varepsilon_{pn,pn} = 0$$

أو الشكل:

$$\varepsilon_{mn,mn} - \varepsilon_{mm,nn} + \varepsilon_{pp,mm} + \varepsilon_{mm,pp} - 2\varepsilon_{pm,pm} = 0 \qquad (20)$$

(p لا تجمع)

والتي منها نحصل على المعادلات الثلاث الأولى كمايلي.

المعادلة الأولى: نحصل عليها عندما $Pl = 33$ ، فنجد المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{12,12} + \varepsilon_{21,21} = \varepsilon_{22,11} + \varepsilon_{11,22}$$

أو:

$$2\,\varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11}$$

المعادلة الثانية : عندما $Pl = 22$ ، فنجد المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{33,33} + \varepsilon_{13,13} + \varepsilon_{31,31} = \varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{11,11} + \varepsilon_{33,33}$$

وبالاختصار نجد المعادلة الثانية:

$$\varepsilon_{13,13} + \varepsilon_{31,31} = \varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33}$$

أو:

$$2\,\varepsilon_{13,13} = \varepsilon_{11,33} + \varepsilon_{33,11}$$

المعادلة الثالثة : عندما $Pl = 11$ ، فنجد المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{22,22} + \varepsilon_{33,33} + \varepsilon_{23,23} + \varepsilon_{32,32} = \varepsilon_{33,22} + \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{22,22} + \varepsilon_{33,33}$$

وبالاختصار، نجد المعادلة الثالثة التالية:

$$\varepsilon_{23,23} + \varepsilon_{32,32} = \varepsilon_{33,22} + \varepsilon_{22,33}$$

أو:

$$2\varepsilon_{23,23} = \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22}$$

أما من أجل قيم p المختلفة عن قيم l؛ أي عندما $pl = 12, 13, 23$ ، فإن العلاقة (19) تتحول إلى العلاقة التالية :

$$\varepsilon_{pl,mm} - \varepsilon_{pm,ml} + \varepsilon_{mm,pl} - \varepsilon_{ln,pn} = 0 \qquad (21)$$

والتي منها نحصل على باقي المعادلات المتعلقة بالدلائل $pl = 12, 13, 23$ ، كما يلي.

المعادلة الرابعة: عندما $pl = 23$ ، فنجد المعادلة الرابعة التالية:

$$\varepsilon_{32,11} + \varepsilon_{11,23} - \varepsilon_{31,21} - \varepsilon_{12,13} = 0$$

المعادلة الخامسة: عندما $pl = 13$ ، فنجد المعادلة الخامسة:

$$\varepsilon_{31,22} + \varepsilon_{22,13} - \varepsilon_{32,12} - \varepsilon_{21,23} = 0$$

المعادلة السادسة : عندما $pl = 12$ ، فنجد المعادلة السادسة:

$$\varepsilon_{21,33} + \varepsilon_{33,12} - \varepsilon_{23,13} - \varepsilon_{31,32} = 0$$

تسمى هذه المعادلات الست السابقة، بشروط الاستمرار أو بمعادلات توافق الانفعالات. وهي تكتب بعد الإصلاح، بالشكل المبسَّط التالي:

$$\begin{aligned}
&\partial_2^2\varepsilon_{11}+\partial_1^2\varepsilon_{22}=2\partial_1\partial_2\varepsilon_{12}\\
&\partial_1^2\varepsilon_{33}+\partial_3^2\varepsilon_{11}=2\partial_1\partial_3\varepsilon_{13}\\
&\partial_2^2\varepsilon_{33}+\partial_3^2\varepsilon_{22}=2\partial_2\partial_3\varepsilon_{23}\\
&\partial_2\partial_3\varepsilon_{11}=\partial_1(-\partial_1\varepsilon_{23}+\partial_3\varepsilon_{12}+\partial_2\varepsilon_{13})\\
&\partial_1\partial_3\varepsilon_{22}=\partial_2(-\partial_2\varepsilon_{13}+\partial_3\varepsilon_{12}+\partial_1\varepsilon_{23})\\
&\partial_1\partial_2\varepsilon_{33}=\partial_3(-\partial_3\varepsilon_{12}+\partial_1\varepsilon_{32}+\partial_2\varepsilon_{31})
\end{aligned}\tag{22}$$

يمكن أن نثبت أن (22) ، بدورها تعطينا فقط ثلاثة معادلات مستقلة بالمركبات الست المستقلة، لتنسور الانفعال ε_{ij} .

إن كل الكلام السابق صحيح إذا كانت C_0 منطقة بسيطة الترابط في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد R^3 . أما إذا كانت C_0 منطقة متعددة الترابط في الفضاء الإقليدي R^3 فهذا موضوع يمكن أن ندرسه فيما بعد.

فيما يلي سنثبت التكافؤ مابين الشكل (18) ، والشكل المستنتج بالطريقة التنسورية لمعادلات توافق الانفعالات، في النظام الإحداثي الديكارتي. ولهذا الغرض يلزمنا التمرين التالي.

تمرين: الشرط اللازم والكافي حتى تكون مصفوفة الأعداد الحقيقية $\{A_{mn}\}_{3\times 3}$ ، متناظرة ، هـــــــو أن يحقـــــــق حـــــــدها العـــــــام A_{mn} ،الشـــــــرط التـــالي:

$$\varepsilon_{pmn}\, A_{mn} = 0$$

ولنوجد الآن التكافؤ المذكور، معتمدين على التمرين السابق.

وفقاً للعلاقة (18) ، لدينا: $\varepsilon_{pnr}\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn} = 0$

والتي تكتب بالشكل المكافئ التالي: $\varepsilon_{pnr}\left(\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn}\right) = 0$.

وبالاعتماد على التمرين السابق، نجد أن هذا الشيء يكافئ أن المصفوفة التي حدها العام $\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn}$ متناظرة بالنسبة للدليلين n و r ؛أي يكافئ تتحقق العلاقة:

$$\varepsilon_{lsm}\varepsilon_{rs,mn} = \varepsilon_{lsm}\varepsilon_{ns,mr}$$

والذي بدوره يكافئ القول بأن:

$$\varepsilon_{lsm}\left(\varepsilon_{rs,mn} - \varepsilon_{ns,mr}\right) = 0$$

وحسب نفس التطبيق السابق ، نجد أن هذا الشيء يكافئ القول بأن المصفوفة ذات الحد العام $\varepsilon_{rs,mn} - \varepsilon_{ns,mr}$ ، متناظرة بالنسبة لـ m , s ؛ أي يكافئ تحقق العلاقة:

$$\varepsilon_{rs,mn} - \varepsilon_{ns,mr} = \varepsilon_{rm,sn} - \varepsilon_{nm,sr}$$

والذي تكافئ العلاقة التالية:

$$\varepsilon_{rs,mn} + \varepsilon_{nm,sr} - \varepsilon_{ns,mr} - \varepsilon_{rm,sn} = 0$$

فـإذا غيرنـا الآن، رمـز الرباعيـة $r_i\ s_j\ m_k\ n_e$ إلـى الرمـز $i_j\ k_l$، فتصـبح جملـة المعـادلات السابقة بالشكل:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \qquad (23)$$

وهـو نفـس الشـكل لمعـادلات توافـق الانفعـالات ، فـي النظـام الاحـداثي الـديكارتي، والمسـتنتج بالطريقة التنسورية .

فيما يلي سنصل إلى المعادلات (22) ، انطلاقاً من المعادلات (23) ،التي حصلنا عليها سـابقا وفقـاً للطريقـة التنسـورية.في الفصـل الثـاني، وجـدنا أن $ijkl$ ، تأخـذ – بحسـب العلاقـة (27)– القيم التالية:

$$ijkl = 3121\ ,\ 3212\ ,\ 3132\ ,\ 1212\ ,\ 3232\ ,\ 3131$$

ولنعوض الآن هذه القيم في العلاقات (23) ، فنجد العلاقات التالية:

القيمة الأولى: $ijkl = 3121$ ، تقودنا إلى المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{31,21} + \varepsilon_{21,31} - \varepsilon_{11,32} - \varepsilon_{32,11} = 0$$

وبالتالي:

$$\partial^2_{13}\varepsilon_{12} + \partial^2_{12}\varepsilon_{13} - \partial^2_{11}\varepsilon_{23} - \partial^2_{32}\varepsilon_{11} = 0$$

القيمة الثانية : $ijkl = 3212$ ، تعطينا المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{32,12} + \varepsilon_{12,23} - \varepsilon_{22,13} - \varepsilon_{31,22} = 0$$

وبالتالي :

$$\partial^2_{32}\varepsilon_{12} + \partial^2_{12}\varepsilon_{23} - \partial^2_{22}\varepsilon_{13} - \partial^2_{31}\varepsilon_{22} = 0$$

القيمة الثالثة : $ijkl = 3132$ ، تعطينا المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{31,32} + \varepsilon_{23,13} - \varepsilon_{21,33} - \varepsilon_{33,12} = 0$$

وبالتالي:

$$\partial^2_{13}\varepsilon_{23} + \partial^2_{23}\varepsilon_{13} - \partial^2_{12}\varepsilon_{33} - \partial^2_{33}\varepsilon_{12} = 0$$

القيمة الرابعة: $ijkl = 1212$ ، تعطينا المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{12,12} + \varepsilon_{21,21} - \varepsilon_{22,11} - \varepsilon_{11,22} = 0$$

وبالتالي :

$$2\,\partial^2_{12}\varepsilon_{12} - \partial^2_{22}\varepsilon_{11} - \partial^2_{11}\varepsilon_{22} = 0$$

القيمة الخامسة : $ijkl = 3232$ ، تعطينا المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{23,23} + \varepsilon_{32,32} - \varepsilon_{22,33} - \varepsilon_{33,22} = 0$$

وبالتالي:

$$2\,\partial^2_{23}\varepsilon_{23} - \partial^2_{22}\varepsilon_{33} - \partial^2_{33}\varepsilon_{22} = 0$$

أخيرا، لقيمة السادسة: $ijkl = 3131$ ، تعطينا المعادلة التالية:

$$\varepsilon_{13,13} + \varepsilon_{31,31} - \varepsilon_{11,33} - \varepsilon_{33,11} = 0$$

وبالتالي:

$$2\,\partial_{13}^{2}\varepsilon_{13}-\partial_{11}^{2}\varepsilon_{33}-\partial_{33}^{2}\varepsilon_{11}=0$$

الفصل الاول

أساسيات المرونة الحرارية الخطية مع سرعات موجة محدودة

نركز على نظرية المرونة الحرارية المعممة المزدوجة للمواد الصلبة ، الخالية من المفارقة الكلاسيكية لسرعات الانتشار اللانهائي للإشارات الحرارية. كما هو معروف ، فإن هذا التناقض ناتج عن نموذج فورييه للتوصيل الحراري ، الذي لوحظ لأول مرة في الموصلات المتماثلة الصلبة

$$qi = -k \frac{\partial\theta}{\partial xi} \qquad (1)$$

الذي يؤدي إلى معادلة الانتشار (أي نوع مكافئ)

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{k}{\rho cp}\nabla 2\theta. \qquad (2)$$

في المعادلتين (1) و (2) ،qi هو تدفق الحرارة ،θ هي درجة الحرارة ، k هي الموصلية الحرارية ، ρهي كثافة الكتلة ، و cp هي الحرارة المحددة عند الضغط المستمر. كما تقدم المعادلة الأولى أعلاه تدوين الفهرس ، الذي نتبعه في جميع أنحاء الكتاب عند التعامل مع التنسورات.

لإزالة المفارقة المذكورة ، بعد الاقتراح الذي يعود إلى ماكسويل (1867) و كاتانيو (1948) ، ينبغي للمرء أن يستبدل المعادلة (1) ب :

$$\left(1 + t_o \frac{\partial}{\partial t}\right) q_i = -k \frac{\partial\theta}{\partial x_i}, \qquad (3)$$

عندئذٍ ، بدلاً من المعادلة (2) ، توجد معادلة التلغراف (أي النوع الزائدي):

$$t_o \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 \theta. \qquad (4)$$

من الواضح أن نماذج التوصيل الحراري التي هي كموجة ، يطلق عليها غالبًا الصوت الثاني ، في المعادلتين (3) و (4):

هو وقت الاسترخاء : t_o

c_T = (k / $\rho_c p_t$ 0) 1/2 : يمثل سرعة الصوت الثاني.

تم تطوير خصائص هذا النموذج بالإضافة إلى نماذج أخرى أكثر تعقيدًا ، وكل ذلك في وضع الموصلات الصلبة ، ودُرست دراسة مكثفة على مدار نصف القرن الماضي (جوزيف وبريزيوسي ، 1989 ، 1990) .

خلال نفس الفترة الزمنية ، وبالتوازي مع هذا النشاط ، كان هناك نمو كبير في درجة الحرارة المرنة في مجال التوصيل الحراري من نوع غير فورييه في أجسام مرنة.

إلى جانب مفارقة سرعات الانتشار اللانهائية ، تقدم نظرية المرونة الحرارية الكلاسيكية وصفًا غير مرض أو ضعيف لاستجابة المادة الصلبة للتحميل السريع العابر (على سبيل المثال ، بسبب نبضات الليزر القصيرة) وفي درجات حرارة منخفضة.

وقد أدت هذه العيوب إلى قيام العديد من الباحثين بتطوير نظريات المرونة الحرارية المعممة المختلفة. وبعد اتباع خطوات ماكسويل و كاتانيو ، اقترحوا نماذج بالحرارة

مع واحد أو اثنين من أوقات الاسترخاء ، ونماذج تركز على درجات حرارة منخفضة ، ونماذج مع عدم وجود تبديد الطاقة ، مرحلة ثنائية نظرية التأخر ، أو حتى التوصيل الحراري الشاذ الموصوف بحساب التفاضل والتكامل الكسري. ظهر عدد من المراجع حول هذا الموضوع ، على شكل كتاب في اغلب الاحيان ، على مدى العقدين الماضيين :

(Chandrasekharaiah, 1986, 1998; le , san, 2004; Ignaczak, 1980b, 1989a,b, 1991; Hetnarski and Ignaczak, 1999, 2000).

يجب أن نذكر هنا ايضا كتابا عن المرونة الحرارية المعممة (Podstrigach and Kolano، 1976) وكتابا حول المرونة الحرارية الديناميكية الكلاسيكية والمعممة (Dhaliwal and Singh، 1980).

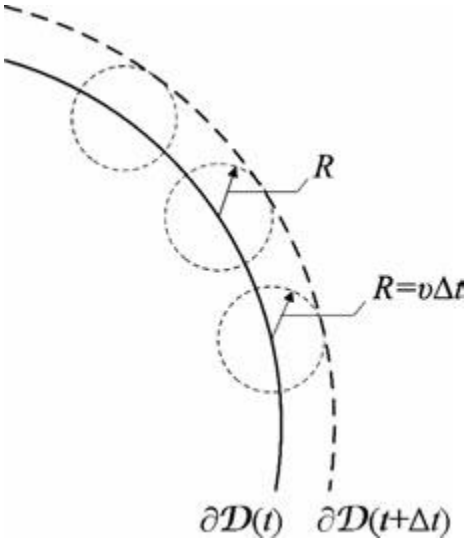
في العقدين الماضيين ، كان هناك نشاط بحثي متزايد في المرونة الحرارية المعممة ، اكثر من الامور الأخرى ، في ألمانيا والهند وإيران واليابان وبولندا وإسبانيا والمملكة المتحدة والولايات المتحدة الأمريكية والعديد من الدول العربية ، لا حصر لها . في العقدين الماضيين ، كان هناك نشاط بحثي متزايد في المرونة الحرارية المعممة – من بين أمور أخرى ، في ألمانيا ، الهند ، إيران ، اليابان ، بولندا ، إسبانيا ، المملكة المتحدة ، الولايات المتحدة الأمريكية ، والعديد من الدول العربية ، على سبيل المثال لا الحصر. إلى جانب العديد من التطبيقات التكنولوجية نذكر هنا الاهتمام بنمذجة الحرارة في الأنسجة الحية ، على سبيل المثال (داي وآخرون ، 2008).

بشكل عام ، لقد حان الوقت الآن لكتابة دراسة حديثة عن موضوع المرونة الحرارية ، أو المرونة الحرارية الديناميكية التي تحكمها معادلات القطعي ، والتي تمثل مجموعة فرعية من المرونة الحرارية المعممة حيث يحدث اتصال مع هذه النظريات

في حفنة من الدراسات حول ميكانيكا الاستمرارية العقلانية الممتدة والديناميكا الحرارية

(Müller and Ruggeri, 1993, 1998; Wilma´nski, 1998).

يعكس عنوان الاطروحة ، المرونة الحرارية مع سرعات الموجة المحدودة ،و المفهوم المحدد لمجال التأثير D(t) في التعامل مع مفارقة سرعات الانتشار اللانهائي للإشارات الحرارية.حيث يرجع تاريخ D(t)إلى عام "1915"، وهو تعميم لمفهوم دعم الوظيفة f(t)، التي هي عبارة عن مجموعة من جميع النقاط في الجسم التي يمكن الوصول إليها عن طريق الاضطرابات الميكانيكية الحرارية التي تنتشر من موضع الاضطراب بسرعة لا تزيد عن المحدود υ ، انظر الشكل 1.



الشكل الأول: رسم تخطيطي يوضح تطور مجال التأثير عبر مبدأ هيجنز من وقت إلى آخر (t+ Δt)

يوضح المثال التالي مفهوم مجال التأثير (DOI).

مثال 0.1: مشكلة كوشي للمعادلة القطعية. خذ بعين الاعتبار مشكلة القيمة الحدودية أحادية البعد (D1) التالية. العثور على حل لمعادلة الموجة

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(x,t) = 0, |x| < \infty, t \geq 0, c > 0, \qquad (5)$$

تخضع للشروط الأولية

$$u(x, 0) \equiv \eta(x) = u0\ [H(x + x0) - H(x - x0)]\ |x| < \infty,\ x0 > 0 \qquad (6)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0 \qquad |x| < \infty\ ,$$

حيث ان $H=H(t)$ هي وظيفة

$$H(t) = f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad (7)$$

و $u0$ يعتبر ثابت. عن طريق حل فريد للمشكلة (5) – (7) نأخذ النموذج :

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\eta(x + ct) + \eta(x - ct)]$$
$$= \frac{1}{2}u0\ [H(x + x0 + ct) - H(x - x0 + ct)$$
$$+ H(x + x0 - ct) - H(x - x0 - ct)]\ , \qquad (8)$$

ومن المعادلة (8) يترتب التالي

$$u(x, t) = 0 \text{ for } |x| > x0 + ct. \qquad (9)$$

الحركة الناتجة عن "الاضطراب" الأولي المستطيل على الفاصل الزمني $[-x_0, x_0]$, انظر الى المعادلة (6) فهي مجموعتين من الأمواج المستطيلة ، كل منهما يتحرك بسرعة $c> 0$ ،واحدة إلى اليمين والآخر الى اليسار ، وبهذه الطريقة بالنسبة للنقطة $t> 0$ الثابتة ، تكون النقاط $x > x_0 + c_t$ و $x<-x_0 - c_t$ غير مضطربة. لهذا ، فإن الفاصل الزمني $[-x_0 - c_t$ ، $x_0 + c_t]$ يمثل مجالًا للتأثير (DOI) من البيانات

الأولية في الوقت $t > 0$ للمشكلة (5) – (7). وهذا المثال ، المتعلق بمشكلة *Cauchy* لمعادلة الموجة الكلاسيكية ، يوضح بوضوح مفهوم *DOI*. تم توسيع المفهوم في الكتاب ليشمل نظري $S - L$ و $L - G$ الحراري الزائدين.

لتوضيح مفهوم "السرعة اللانهائية" لحقل درجة الحرارة تحكمه معادلة مكافئ ، خذ مثالاً آخر.

مثال 0.2: مشكلة كوشي لمعادلة مكافئ. إيجاد حل لمعادلة درجة الحرارة

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right) T(x,t) = 0, |x| < \infty, t \geq 0, \qquad (10)$$

وهنا الشرط الأولي :

$$T(x, 0) \equiv T0(x) = T * 0\ [H(x + x0) - H(x - x0)]\ ,\ |x| < \infty,\ x0 > 0. \qquad (11)$$

في المعادلة (10) و (11) $T_0 > 0$, K>o

لإيجاد حل للمشكلة (10) و (11) ، نستخدم طريقة تحويل لابلاس ، ونستخرج :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}T - \frac{1}{k}(pt - t_0) = 0, \qquad (12)$$

حيث يشير الشريط إلى تحويل لابلاس و p هو معامل التحويل ، يماثل شكل مكافئ من المعادلة رقم (12)

$$\left(D^2 - \frac{p}{k}\right) T = -\frac{T_0}{k}\ ,\ D = \frac{d}{dx}\ , \qquad (13)$$

نلاحظ العامل f الذي يعتبر مناسب لحل المعادلة :

$$\left(D^2 - \frac{p}{k}\right) \overline{\ \ } f(x, p) = -\delta(x - \xi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\alpha(x - \xi)d\alpha. \qquad (14)$$

نحن نبحث عن $\bar{f}$ في النموذج

$$f(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha, p) \cos \alpha(x - \xi) d\alpha, \qquad (15)$$

عند تعويض المعادلة (15) بالمعادلة (14) نحصل على :

$$f(x, p) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos \alpha(x-\xi)}{a^2+p/k} d\alpha = \frac{\sqrt{k}}{2} \frac{\exp[-|x-\xi|\sqrt{p/k}}{\sqrt{p}} . \qquad (16)$$

بأخذ معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (16) نحصل على :

$$f(x, t) = \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[\frac{-(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right]. \qquad (17)$$

نتيجة لذلك ، فإن الحل الوحيد لمشكلة كوشي (10) و (11) يأخذ الشكل :

$$T(x, t) = \frac{T_0^*}{\sqrt{4\kappa\pi t}} \int_{-x0}^{x0} \exp\left[\frac{-(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right] d\xi. \qquad (18)$$

المعادلة (18) تعني أنه لكل $t > 0$ و $|x| < \infty$ ، تأخذ درجة الحرارة $T = T(x)$ ، t قيما إيجابية ، مما يعني أنها تنتشر بسرعة لا نهائية.

الملاحظة 0.1 يمكن معاملة معادلات المجال في المثالين 1 و 2 كحالات معينة من معادلة الأمواج بالتبديد

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2h\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = 0 \; |x| < \infty, t \geq 0, \qquad (19)$$

حيث أن $h>0$.و كتحليل مقارب لحل مشكلة كوشي بالنسبة للمعادلة (19) عندما $[c \to \infty, h > 0, or\ c > 0, h \to 0]$

و يوفر مفهوم مجال التأثير المقارب (*ADOI*)) لمعادلة موجة كلاسيكية وسرعة درجة حرارة تميل إلى ما لا نهاية لمعادلة مكافئ. مفهوم *ADOI* هو مفهوم طبيعي عند صياغة مبدأ سانت فينانت

[Sternberg,1954; Boley, 1955; Boley and Weiner, 1960; Chirita, 1995, 2007; Ignaczak, 1998,2002; Quintanilla, 2001],

أو تحديد دور مصطلحات القصور الذاتي من خلال ما يسمى رقم بولي

[Boley, 1972; Boley and Barber, 1957].

تركز هذه الاطروحة على نظريتين رائدتين عن المرونة الحرارية الزائدية: نظرية لورد شولمان (1967) – وتسمى أيضًا نظرية ذات وقت استرخاء واحد – ونظرية غرين ليندساي (1972) – تسمى أيضًا نظرية ذات زمنين للاسترخاء. كلاهما مجموعة من سلالات صغيرة عن درجات حرارة التوازن ، وهكذا فإن معادلات المجال الناتجة هي المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية. التعقيد بالإضافة إلى الثراء – وبالتالي جاذبية هذه النظريات – يرجع إلى اقتران الحقول الميكانيكية بالمجالات الحرارية.

يهتم الكتاب بالجوانب الرياضية لكلتا النظريتين – نظريات الوجود والتفرد ، ونظريات مجال التأثير ، ومبادئ الاختلاف التلافيفي – وكذلك مع طرق التعامل مع مجموعة من مشكلات القيمة الأولية. في ما يلي نقدم لمحة عامة عن محتويات الكتاب.

يستعرض الفصل الأول المعادلات الأساسية لللدنة الحرارية الكلاسيكية ، ثم يعطي المعادلات المناظرة لللدنة الحرارية مع وقت استرخاء واحد (أو نظرية $L - S$) ، تليها مجموعة مماثلة من معادلات المرونة الحرارية مع اثنين من أوقات الاسترخاء أو نظرية ($G - L$). في كل حالة ، يتم ذكر قوانين التوازن العالمية من حيث زوج الإزاحة و درجة الحرارة أو بدلاً من ذلك ، زوج التدفق الحراري ، من حيث زوج آخر من المتغيرات الميكانيكية الحرارية.

يقدم الفصل الثاني أولا وصف تقليدي و وصف غير تقليدي لعملية لدن بالحرارة ، ويعطي مشاكل القيمة الأولية المختلطة لكل من : الإزاحة و درجة الحرارة والتوتر، والحرارة و تدفق نظرية $L-S$ ، ودرجة حرارة الإزاحة ودرجة حرارة الإجهاد نظرية LG

. يتبع ذلك مناقشة للعلاقات بين الأوصاف لعملية المرونة الحرارية من حيث أزواج مختلفة من المتغيرات الميكانيكية الحرارية.

الفصل الثالث يعطي نظريات وجود وتفرد للعمليات الحرارية التقليدية وغير التقليدية. على هذا الأساس ، يعرض الفصل الرابع مجال نظرية التأثيرات المميزة لكلتا النظريتين: مشكلة الحرارة المحتملة و مشكلة الإجهاد الطبيعي من حيث (الحرارة و التدفق و مشكلة درجة حرارة الإجهاد الطبيعي ، ومشكلة درجة حرارة الإزاحة).

الفصل الخامس مكرس لمبادئ التباين التلافيفي في نظري *L–S* و *G–L*. يقدم أولاً الوصف البديل لعملية اللدنة الحرارية التقليدية في نظرية *Green–Lindsay* ، ثم يعطي المبادئ المتغيرة لعمليات اللدنة الحرارية التقليدية وغير التقليدية في نظريتي *L – S* و *G–L*.

يركز الفصل السادس على معادلة مركزية للحرارة الحرارية مع سرعات موجات محدودة ، أي معادلة تفاضلية جزئية ، وبشكل ملحوظ ، لها شكل مماثل لكلتا النظريتين. ثم نقوم بتطوير نظرية التحلل لمعادلة مركزية لنظرية *Green–Lindsay* ، والمعادلات الشبيهة بالموجة ذات الالتواء ، وسرعة وتخفيف الاضطرابات الحرارية . ننتهي بتحليل معامل الالتواء والنواة.

يفتح الفصل السابع مع حلول أساسية لنطاق ثلاثي الأبعاد (*3D*) ، ثم يطور حلولًا للعديد من المشكلات الرئيسية المتمثلة في المرونة الحرارية: مشكلة درجة الحرارة المحتملة لنطاق محدد ثلاثي الأبعاد ، وطبقة لدن بالحرارة ، والحل من النوع Nowacki ، حل من نوع دانيلوفيسكا، واستجابة لدن بالحرارة من نصف مساحة لتشعيع الليزر.

يتناول الفصل الثامن التمثيلات المتكاملة والمعادلات التكاملية للحلول الأساسية ، والتمثيل المتكامل للحل لنظام مركزي للمعادلات ، والمعادلات المتكاملة لمشكلة الحرارة المحتملة.

في الفصل التاسع ، نبدأ من ملاحظة أن الحلول الأساسية لنظرية *G–L* يمكن تحديدها بمساعدة متواليات متعددة الحدود على المحور الزمني ، ما يسمى متعدد الحدود من المرونة الحرارية. هنا ، نعطي عددًا من علاقات التكرار التي تصف هذه

الحدود المتعددة ، ثم نظهر أنه يمكن تحديد زوج من كثير الحدود متعدد العناصر بالحرارة بعنصر من المساحة الخالية لمشغل تفاضلي عادي خطي. من هذا يتم تطوير علاقة متكاملة ، وما يرتبط بها من متعدد الحدود الحرارية.

يركز الفصل العاشر على الأسطح المفردة التي تنتشر في وسط حراري ، ويدرس انتشار موجة الصدمة الطائرة في نصف فضاء حراري مرن مع وقت استرخاء واحد ، وكذلك انتشار موجة تسريع الطائرة في نصف فضاء حراري مع وقت الاسترخاء مرتين.

من ناحية أخرى ، يدرس الفصل الحادي عشر موجات دورية ، موجات كروية واسطوانية بالإضافة إلى حلول أساسية ولمحلول درجة الحرارة المحتملة ، كل ذلك في وضع نظرية $G\ L$.

يقدم الفصل الثاني عشر أولا استعراض موجز للعديد من النظريات الأخرى ، والتي تم تصنيفها جميعا على أنها مرونة حرارية معممة وفقا ل غرين و الناغدي. بعد ذلك ، يتبع تبرير وجود مشتق الوقت المادي بدلاً من مشتق الوقت الجزئي في معادلة ماكسويل–كاتانيو (3) ؛ يتم ذلك في أعقاب العمل الأخير الذي قام به كريستوف و جوردن عام(2005). وبالتالي نرى أنه يمكن استخدام مشتق جزئي في نظرية تركز على الميكانيكا الصلبة في السلالات اللانهائية. هناك طريقة أخرى لمعرفة كيف ينشأ مشتق الوقت المادي في المعادلة (3) بشكل طبيعي وهي أخذ الديناميكا الحرارية مع المتغيرات الداخلية كنقطة انطلاق لاشتقاق القوانين التأسيسية و يتم ذلك في القسم التالي من الفصل 12. ما يليه هو سرد لبعض تطبيقات نظريتي $L - S$ و $G - L$: لا لهواء والوسائط اللولبية ، مع بنيات متجانسة ومركبة ؛ إلى الأمواج السطحية ؛ والتخميد بالحرارة في الرنانات الميكانيكية النانوية. يتوج الفصل بالمرونة الحرارية مع التوصيل الحراري الشاذ الذي يتم معالجته عبر حساب التفاضل والتكامل الكسري ، وصياغة المرونة الحرارية للوسائط الكسورية في الوريد المتمثل في تنظيم الأبعاد.

بينما تكرس الفصول من 1 إلى 12 للنظريات الخطية الزائدة من المرونة الحرارية ، فإن الفصل الثالث عشر يتعلق بموصل حراري جامد ولكنه غير خطي وفقا لكولمان

وآخرون. (1982 ، 1983 ، 1986). يطابق هذا النموذج المادي الخاص قانون الحفاظ على الطاقة ، وعدم المساواة في تبديدها ، ومعادلة كاتانيو ، وعلاقة الطاقة–الانتروبيا المعممة مع اختلاف مكافئ للطاقة والنتروب على طول محور تدفق الحرارة. بعد مراجعة معادلات المجال لحالة *D*1 ، يتم الحصول على عدد من الحلول ذات الصيغة المغلقة لمعادلات الإدارة غير الخطية ، ثم يتم تطبيق طريقة البصريات الهندسية غير الخطية ضعيفة للحصول على حل مقارب لمشكلة كوشي مع حالة أولية مضطربة ضعيفة مرتبطة بالنموذج اللاخطي.

نظرًا لتركيز الكتاب على نظريتين خاصتين في الفصول الإحدى عشر الأولى ، مصحوبة بسرد لبعض النماذج الأخرى في الفصلين 12 و 13 ، يتم تقديم ملحق مرجعي في نهاية الكتاب. إنه يجمع الكثير من الأدبيات الموجودة على النماذج الحرارية الزائدية الخطية وغير الخطية وتعميماتها المختلفة.

أخيرًا ، نود أن نشير إلى التشابه المعروف بين المرونة الحرارية الكلاسيكية والانتقال الجماعي في المواد الصلبة المرنة المتوترة ، والتي تستند إلى التشابه الأكثر أساسية للتوصيل الحراري من نوع فورييه لنشر نوع *Fick*. وبالتالي ، فإن مفارقة سرعات الانتشار اللانهائية تنشأ أيضًا في مشكلات النقل والانتشار الكلاسيكية ، بحيث يمكن تقديم حلها من خلال مجموعة من النماذج المطورة بالفعل في نظريات المرونة الحرارية المعممة.

وقد اقترح هذا القرار مؤخرا

Sherief et al. (2004), Aouadi (2007,2008) and Sharma et al. (2008)

–أساسيات المرونة الحرارية الكلاسيكية :

1.1.1 الاعتبارات الأساسية

تعتبر نظرية المرونة الحرارية الكلاسيكية (الخطية) هي نقطة الانطلاق لعدد من التعميمات المختلفة بما في ذلك: اللزوجة الحرارية المرنة ، المرونة الحرارية مع

الانتشار ، المرونة الحرارية الكهربائية ، أو المرونة الحرارية بسرعات موجية محدودة. وهكذا ، قبل المضي قدمًا في عرض هذه النظريات ، من المفيد مراجعة اشتقاق المعادلات الأساسية للمرونة الحرارية الكلاسيكية (كارلسون ، 1972).

بالنظر إلى حقيقة أن مفهوم الجسم بالحرارة يمكن تعريفه بطرق مختلفة ، (1) دعنا نبدأ بالقول إنه في هذا الكتاب محجوز للجسم B حيث تحدث عملية ديناميكية مقرونة لتبادل الطاقة الميكانيكية إلى الحرارية الطاقة تحت تأثير الأحمال الحرارية الميكانيكية المطبقة خارجيًا. ترافق هذه العملية سلالات وتغيرات في درجة الحرارة داخل الجسم ، وكلها تتلاشى عند إزالة الأحمال الميكانيكية الحرارية المذكورة. والجدير بالذكر أن هذه العملية موصوفة من حيث متغيرات المجال 2 من خلال مجموعة العلاقات :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \qquad (1.1.1)$$

معادلات التوازن الديناميكي

$$S_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i, \; S_{ij} = S_{ji}, \qquad (1.1.2)$$

قانون الحفاظ على الطاقة

$$\dot{e} = S_{ij}\dot{E}_{ij} - q_{i,i} + r, \qquad (1.1.3)$$

1 يمكن للمرء أن يتعامل مع مرونة حرارية ثابتة ، مرونة حرارية شبه ثابتة ، مرونة حرارية شبه ثابتة ، مرونة حرارية ديناميكية غير مترابطة ، ومرونة حرارية ديناميكية مقترنة ؛ انظر على سبيل المثال (Nowacki، 1975).

2 نعني بمتغيرات المجال الحقول الفيزيائية التي تميز عملية لدن بالحرارة: واجهة المستخدم للإزاحة ، وتوتر الموتر Eij ، وتغير درجة الحرارة ϑ ، وغيرها.

تبديد عدم المساواة

$$\dot{\eta} \geq -\left(\frac{q_i}{\theta}\right), i + \frac{r}{\theta} \qquad (\theta > 0)\ , \qquad (1.1.4)$$

والعلاقات التأسيسية (لم يتم تحديدها بعد). باستخدام تدوين التينور القياسي في ما ورد أعلاه ، يشير تعبير ui و Eij و Sij و qi و θ و η و e على التوالي إلى التشريد والسلالات والضغوط وتدفق الحرارة ودرجة الحرارة المطلقة والانبعاثات والطاقة الداخلية للجسم. علاوة على ذلك ، فإن b و r و ρ تعني قوى الجسم ومصادر الحرارة الخارجية وكثافة الكتلة للجسم ، على التوالي ؛ هنا نستخدم الرموز القياسية: $\dot{\eta} = \partial\eta / \partial t$ ، $(\dot{\ })$ ، 3. $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot) / \partial x_i$ كما هو معروف جيدًا ، العلاقات (1.1.3) و (1.1.4) وتسمى أيضا القوانين الأولى والثانية للديناميكا الحرارية ، على التوالي. تقديم الطاقة المجانية من خلال

$$\psi = e - n^{\theta}, \qquad (1.1.5)$$

وبالجمع بين المعادلتين (1.1.3) و (1.1.4) ، وصلنا إلى عدم المساواة في التبديد الذي يتضمن ψ:

$$\Psi + \eta\dot{\theta} - S_{ij}\,\dot{E}_{ij} + \frac{q_i\theta_{,i}}{\theta} \leq 0. \qquad (1.1.6)$$

الجسم الحراري الكلاسيكي هو الجسم الذي ، إلى جانب العلاقات (1.1.1) – (1.1.6) ،

$$S_{ij} = \frac{\partial\psi}{\partial E_{ij}}\ , \qquad (1.1.7)$$

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\ , \qquad (1.1.8)$$

حيث $\psi = \psi$ (Eij ,θ) ، هي وظيفة تعطى بشكل مسبق. مع الطاقة المجانية المختارة ، لدينا

$$\Psi = \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{Eij}}\mathrm{Eij} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\theta = \mathrm{Sij}\ \dot{}\mathrm{Eij} - \eta\dot{\theta} \qquad (1.1.9)$$

والمعادلة (1.1.6) تأخذ الشكل

$$q_{i\theta,i} \leq 0. \qquad (1.1.10)$$

علاوة على ذلك ، فإن العلاقة (1.1.5) تعني

$$\dot{e} = \mathrm{Sij}\ \dot{}\mathrm{Eij} + \dot{}\eta\theta, \qquad (1.1.11)$$

وقانون الحفاظ على الطاقة (1.1.3) يمكن أن يكتب على النحو التالي

$$\theta\eta = -qi, i + r. \qquad (1.1.12)$$

للحصول على جسم حراري خطي نفترض ذلك

$$|\mathrm{Eij}\ |, |\ \dot{}\mathrm{Eij}\ |, |\theta - \theta 0|, |\theta\dot{}|, |\theta, i| \leq \hat{E}, \qquad (1.1.13)$$

3 تشكل العلاقات (1.1.1) − (1.1.4) نسخة خطية من القوانين الأساسية للميكانيكا والديناميكا الحرارية لسلسلة متصلة مكتوبة بترميز الفهرس.

حيث Ê عدد صغير ، بينما $\theta_0 > 0$ هي درجة حرارة مرجعية ثابتة ، هكذا

$$\mathrm{Sij}\ (0\ ,\ \theta_0) = 0,\ \eta(0,\theta_0) = 0. \qquad (1.1.14)$$

الجسم الكلاسيكي الخطي متباين الحرارة هو الجسم الذي تتماسك فيه العلاقات (1.1.1) − (1.1.14) مع هذا الاختيار من الطاقة المجانية

$$\psi(\mathrm{Eij},\ \theta) = \frac{1}{2}C_{ijkl}\ E_{ij}\ E_{kl} + M_{ij}E_{ij}\vartheta - \frac{c_E}{2\theta_0}\vartheta 2, \qquad (1.1.15)$$

حيث،

$$\vartheta = \theta - \theta_0. \qquad (1.1.16)$$

هنا ، يشير C_{ijkl} و M_{ij} و C_E إلى موتر المرونة ، وموتر درجة حرارة الإجهاد والحرارة المحددة عند إجهاد صفري ، على التوالي. هذه الكميات تلبية العلاقات التالية :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}, \qquad (1.1.17)$$

$$M_{ij} = M_{ji}, \qquad C_E > 0, \qquad (1.1.18)$$

$$C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} > 0. \qquad (1.1.19)$$

من الواضح أن عدم المساواة في التبديد (1.1.10) يجب أن يرضيه تدفق حرارة مناسب q_i، بغض النظر عن اختيار ψ. نحن نفعل ذلك عن طريق الاختيار

$$q_i = -k_{ij}\vartheta, j, \qquad (1.1.20)$$

حيث k_{ij} هو موتر الموصلية الحرارية ، مثل هذا

$$k_{ij} = k_{ji}, \qquad k_{ij}\vartheta,i\vartheta,j > 0 \qquad (1.1.21)$$

يستنتج من العلاقات (1.1.7) و (1.1.8) و (1.1.15) − (1.1.18) أن العلاقات التأسيسية للجسم الحراري هي :

$$S_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} + M_{ji}\vartheta, \qquad (1.1.22)$$

$$\eta = -M_{ij}E_{ij} + \frac{C_E}{\theta_0}\vartheta, \qquad (1.1.23)$$

بينما يتم الحصول على معادلة الطاقة لمثل هذا الجسم عند استبدال $\dot{\theta}\,\eta$ في المعادلة (1.1.12) بمقدار $\dot{\theta}0\,\eta$. وبذلك نتوصل إلى التعريف التالي لبديل الجسم الخطي الحراري المرن: على أنه جسم الذي تحدث به عملية التبادل.

يتم وصف الطاقات الميكانيكية والحرارية بواسطة المعادلات :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad (1.1.24)$$

$$S_{ij,j} + b_i = u_i, \qquad (1.1.25)$$

$$S_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} + M_{ij}\vartheta, \qquad (1.1.27)$$

$$\theta_0\eta = -\theta_0 M_{ij}E_{ij} + C_E\vartheta, \qquad (1.1.28)$$

$$q_i = -k_{ij}\vartheta_{,j}. \qquad (1.1.29)$$

ان العوامل التالية $[u_i$، E_{ij}، S_{ij}، ϑ، η، $q_i]$ في المعادلات – (1.1.24) (1.1.29) عندما يكون $B \times [0,\infty)$، حيث B هو مجال يشغله الجسم من [0 ، ∞) هي فترة زمنية ، وتسمى عملية بالحرارة الكلاسيكية المقابلة لقوة الجسم ثنائية ومصدر الحرارة هو r.

$$K_{ijkl} = (C_{ijkl})^{-1}, \quad \lambda_{ij} = (k_{ij})^{-1}, \qquad (1.1.30)$$

$$A_{ij} = -K_{ijkl}M_{kl}, \quad C_S = C_E - \theta_0 M_{ij}A_{ij}, \qquad (1.1.31)$$

نصل إلى شكل بديل من المعادلات (1.1.24) – (1.1.29):

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad (1.1.32)$$

$$S_{ij}, j + b_i = _u_i \,, \tag{1.1.33}$$

$$\theta_0 \dot{\eta} = -q_i, i + r, \tag{1.1.34}$$

$$E_{ij} = K_{ijkl} S_{kl} + A_{ij} \vartheta, \tag{1.1.35}$$

$$\theta_0 \eta = \theta_0 A_{ij} S_{ij} + C_S \vartheta, \tag{1.1.36}$$

$$\vartheta, i = -\lambda_{ij} q_j \,. \tag{1.1.37}$$

هنا ، K_{ijkl}هو موتر التوافق المطاوع ، A_{ij} هو موتر التمدد الحراري ، λ_{ij} هو موتر المقاومة الحرارية ، و C_S هو الحرارة المحددة عند صفر إجهاد. هذه الرموز تلبي العلاقات التالية :

$$K_{ijkl} = K_{jikl} = K_{ijlk} = K_{klij} \,, \tag{1.1.38}$$

$$A_{ij} = A_{ji}, \; C_S > 0, \tag{1.1.39}$$

$$K_{ijkl} S_{ij} S_{kl} > 0, \tag{1.1.40}$$

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} \,, \; \lambda_{ij} q_i q_i > 0. \tag{1.1.41}$$

في حالة وجود جسم متباين الخواص ، تعتمد الكميات ، C_E، k_{ij}، M_{ij}، و C_{ijkl}وكذلك نظرائهم -1 ، $C - 1S$، λ_{ij}، A_{ij}، و K_{ijkl}على الموقع في الجسم ، ولكن ليس على الزمن المحدد ، فهم يصفون الخواص الفيزيائية للجسم ، وبالتالي يطلق عليهم الوظائف المادية للوسط الحراري.

من الواضح أن العملية الحرارية المرنة المقابلة للتحميل (ثنائية ، ص) يمكن وصفها بواسطة المعادلات (1.1.29–1.1.24) أو (1.1.32–37). نظرا لأن نظامي المعادلة معقدان للغاية ، فنحن عادة ما نختصرهما إلى أنظمة أكثر بساطة تنطوي على الحد الأدنى من الحقول غير المعروفة. على سبيل المثال ، من خلال إزالة إنتروبيا η من المعادلات 1.1.29) – (1.1.24) أو (1.1.37) – (1.1.32)، نجد أن العملية [u_i، E_{ij}، S_{ij}، ϑ، q_i] يوصف بالمعادلات :

$$E_{ij}=\frac{1}{2}(u_i, j + u_j, i) , \qquad (1.1.42)$$

$$S_{ij}, j + b_i= _u_i, \qquad (1.1.43)$$

$$- q_{r\,,i}+ r = C_E\, \vartheta - \theta_0 M_{ij}\, E_{ij}, \qquad (1.1.44)$$

$$S_{ij}= C_{ijkl}E_{\,kl} +M_{ij}\vartheta, \qquad (1.1.45)$$

$$q_i= -k_{ij}\vartheta, j , \qquad (1.1.46)$$

أو عن طريق المعادلات :

$$E_{ij}=\frac{1}{2}(u_i, j + u_j, i), \qquad (1.1.47)$$

$$S_{ij}, j + b_i= _u_i, \qquad (1.1.48)$$

$$- q_{r\,,i}+ r = C_S\, \vartheta + \theta_0 A_{ij}\, S_{ij} , \qquad (1.1.49)$$

$$E_{ij} = K_{ijkl}S_{kl} + A_{ij}\vartheta, \qquad (1.1.50)$$

$$\vartheta, i = -\lambda_{ij}q_j . \qquad (1.1.51)$$

للحصول على الجسم بالحرارة متساوي التوتر لدينا :

$$C_{ijkl}E_{kl} = 2\mu E_{ij} + \lambda E_{kk}\delta_{ij} , \qquad (1.1.52)$$

$$M_{ij}= -(3\lambda + 2\mu)\, \alpha\delta_{ij},\ k_{ij} = k\delta_{ij} , \qquad (1.1.53)$$

و لدينا :

$$K_{ijkl}S_{kl} =\frac{1}{2\mu}\left(S_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\, S_{kk}\delta_{ij}\right), \qquad (1.1.54)$$

$$A_{ij} = \alpha\delta_{ij},\ \lambda_{ij} =\frac{1}{k}\delta_{ij},\ , \qquad (1.1.55)$$

$$C_S = C_E + 3\theta_0\, (3\lambda + 2\mu)\, \alpha^2, \qquad (1.1.56)$$

حيث λ و μ هما معامل Lam´e، α هو معامل التمدد الحراري ، و k هو معامل التوصيل الحراري. في هذه الحالة بالذات ، من المعادلات (1.1.42–46) نحصل على :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \ , \qquad (1.1.57)$$

$$S_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i, \qquad (1.1.58)$$

$$-q_{i,i} + r = C_E \dot{\vartheta} + (3\lambda + 2\mu)\,\alpha\theta_0 E_{kk}, \qquad (1.1.59)$$

$$S_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda E_{kk}\delta_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha\vartheta\delta_{ij} \ , \qquad (1.1.60)$$

$$q_i = -k\,\vartheta_{,i} \ , \qquad (1.1.61)$$

أثناء استبدال النظام (1.1.47–51) نحصل على :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \ , \qquad (1.1.62)$$

$$S_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i, \qquad (1.1.63)$$

$$-q_{i,i} + r = C_S \dot{\vartheta} + \theta_0 \alpha S_{kk}, \qquad (1.1.64)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(S_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} S_{kk}\delta_{ij}\right)\alpha\vartheta\delta_{ij}, \qquad (1.1.65)$$

$$\vartheta_{,i} = -\frac{1}{k} q_i q_i. \qquad (1.1.66)$$

القيود المفروضة على الوظائف المادية للجسم الخواص هي :

$$\rho > 0 \ , \ \mu > 0 \ , \qquad 3\lambda + 2\mu > 0,$$
$$k > 0 \ , \ C_E > 0 \ , \qquad \alpha \neq 0. \qquad (1.1.67)$$

بشكل مشابه ، عند العمل مع الزوج $(q_i$ ،$S_{ij})$ ، نحن نستخدم ما يسمى بالوصف الحراري و التدفق ، والذي يتم الحصول عليه عن طريق ازالة كل من u_i و $E_{ij}\vartheta$ من المعادلات
$(1.1.47–1.1.51)^5$

$$(\rho^{-1}S_{(ik,k)})_{,j} - K'_{ijkl}\,\acute{S}_{kl} + C_{s^{-1}}\,A_{ij}q_{k,k} = -(p^{-1}b_{(i,)})_{j)} + C_{S^{-1}}S\,A_{ij}r$$

$$(C_{s^{-1}}\,q_{k,k})_{,i} - \lambda_{ij}q_j + \theta_0(C_{s^{-1}}\,A_{pq}S_{pq})_{,i} = (C_{s^{-1}}\,r)_{,i}\,, \qquad (1.1.69)$$

حيث :

$$K'_{ijkl} = K_{ijkl} - \theta_0 C_{s^{-1}}\,A_{ij}A_{kl}. \qquad (1.1.70)$$

ستتم مناقشة معادلات المجال الموصوفة من حيث أزواج أخرى – مثل $(S_{ij}$ ،$\vartheta)$ لاحقًا في هذه الاطروحة.

دعونا نلاحظ أن المعادلات *(1.1.68)* و (1.1.69) تمثل الظروف اللازمة لعملية بالحرارة لتكون ملائمة بالنسبة $B \times (0,\infty)$،حيث يطرح سؤال عما إذا كانت هذه الشروط كافية أيضا. الإجابة على هذا السؤال بسيطة بالنسبة للمعادلة (1.1.68).

في الواقع ، إذا كان $(u_i$ ،$\vartheta)$ هو حل المعادلة *(1.1.68)* ، ثم نقوم بتحديد المتغيرات التابعة $(E_{ij}$ وS_{ij} و$q_i)$ بمساعدة المعادلات (1.1.42) و (1.1.45) و (1.1.46) ، نستنتج أن المتغيرات $[E_{ij}$ ،S_{ij} ،ϑ ،$q_i]$ مناسب للمعادلات (*1.1.42–1.1.46*)، أي أنه عملية بالحرارة. وبالتالي ، نحصل على الكفاية .

المسألة ذات الصلة فيما يتعلق بالمعادلة *(1.1.69)* هي الأكثر تعقيدا. تم تقديم حل (*Nickell and Sackman* ،*1968*) بنًاء على افتراض أن الشروط الأولية للزوج $(S_{ij}$ ،$q_i)$ يتم إنشاؤها من القيم الأولية التقليدية للزوج $(u_i$ ،$\vartheta)$. يتكون هذا الحل من تدوين العلاقات التي تحدد u_i وE_{ij} بالنسبة للزوج $(S_{ij}$ ،$q_i)$ بطريقة تجعل المتغيرات $[u_i$ ،E_{ij} ،S_{ij} ،ϑ ،$q_i]$ عملية بالحرارة. نظرا لأن عملية المرونة

الحرارية العامة لا تحتاج إلى أن تكون متسقة مع القيم الأولية التقليدية للمتغيرات (ϑ ،u_i) ، سنعود إلى مسألة كفاية معادلات المجال من حيث متغير واحد من المتغيرات الميكانيكية الحرارية عند صياغة قيمة الحدود الأولية للمشاكلة. في هذه المرحلة ، نستمد الأساس لمثل هذه المشكلات ، أي قوانين التوازن العالمي من حيث (u_i،،) و (S_{ij}، q_i) ، المقابلة على التوالي للمعادلات *(1.1.68)* و (1.1.69).

1.1.2 قانون التوازن العالمي من حيث (u_i، ϑ) :

بضرب المعادلة (1.1.43) بواسطة U_i، نحصل على :

$$u_i\, S_{ij\,,j} + u_i\, bi = \rho u_i\, u_i\,, \qquad (1.1.71)$$

من المعادلة (1.1.42) نجد :

$$(u_i\, S_{ij})_{,j} - E_{ij}S_{ij} + u_i\, bi = \frac{1}{2}\rho\frac{\partial}{\partial t} u_i\, u_i\ . \qquad (1.1.72)$$

بعد ذلك ، نتكامل مع B ، ونستخدم نظرية الاختلاف ، نجد :

$$\int_{\partial B}^{\cdot} u_i\, S_{ij} n_j da + \int_B^{\cdot} u_i b_i dv = \int_B^{\cdot} E_{ij} S_{ij} dv + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_B^{\cdot} \rho u_i u_i dv.$$
(1.1.73)

هنا ، n هو المعدل الطبيعي الخارجي للحدود ∂B:

$$E_{ij}S_{ij} = C_{ijkl}E_{ij}E_{kl} + M_{ij}E_{ij}\vartheta = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(C_{ijkl}E_{ij}E_{kl}) + M_{ij}E_{ij}\vartheta,$$
(1.1.74)

المعادلة (1.1.73) قد تكتب على الشكل التالي :

$$\int_{\partial B}^{\cdot} u_i\, S_{ij} n_j \mathrm{d}a + \int_{B}^{\cdot} u_i b_i \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B}^{\cdot}(C_{ijkl}E_{ij}E_{kl} + \rho u_i u_i)\mathrm{d}v + \int_{B}^{\cdot} M_{ij}E_{ij}\vartheta\, \mathrm{d}v. \tag{1.1.75}$$

بإدخال q_i من (1.1.46) في (1.1.44) ، نحصل على :

$$C_E\vartheta - \theta_0 M_{ij}E_{ij} = (k_{ij}\vartheta_{,j})_{,i} + r, \tag{1.1.76}$$

ومنه نجد :

$$M_{ij}E_{ij}\vartheta = \frac{1}{\theta_0}[C_E\vartheta\vartheta - (k_{ij}\vartheta_{,j})_{,i}\vartheta - r\vartheta] =$$

$$\frac{1}{2\theta_0}C_E\frac{\partial}{\partial t}\vartheta^2 - \frac{1}{\theta_0}(k_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta)_{,i} + \frac{1}{\theta_0}k_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta_{,i} - \frac{r\vartheta}{\theta_0}. \tag{1.1.77}$$

تكامل هذه المعادلة على B يعطي

$$\int_{B}^{\cdot} M_{ij}E_{ij}\vartheta \mathrm{d}v = \frac{1}{2\theta_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B}^{\cdot} C_E\vartheta^2\mathrm{d}v + \frac{1}{\theta_0}\int_{B}^{\cdot} k_{ij}\vartheta_{,i}\vartheta_{,j}\mathrm{d}v - \frac{1}{\theta_0}\int_{B}^{\cdot} r\vartheta\mathrm{d}v - \frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}^{\cdot} n_i k_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta\mathrm{d}a. \tag{1.1.78}$$

باستبدال آخر جزء لا يتجزأ من الجانب الأيمن للمعادلة (1.1.75) بالجانب الأيمن للمعادلة (1.1.78) ، نحصل على الشكل العالمي لقانون التوازن من حيث الزوج (u_i ،ϑ) :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{B}^{\cdot}\rho u_i u_i \mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_{B}^{\cdot} C_{ijkl}E_{ij}E_{kl}\mathrm{d}v + \frac{1}{2\theta_0}\int_{B}^{\cdot} C_E\vartheta^2\mathrm{d}v\right]$$

$$+ \frac{1}{\theta_0}\int_{B}^{\cdot} k_{ij}\vartheta_{,i}\vartheta_{,j}\mathrm{d}v = \int_{\partial B}^{\cdot} u_i\, S_{ij} n_j \mathrm{d}a + \int_{B}^{\cdot} u_i b_i \mathrm{d}v$$

$$+ \frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}^{\cdot} n_i k_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta\mathrm{d}a + \frac{1}{\theta_0}\int_{B}^{\cdot} r\vartheta\mathrm{d}v.$$

(1.1.79)

لاحظ ان المعادلة (1.1.79) تم استخراجها من حقل من المعادلات (1.1.42−1.1.46)، وهو على غرار اشتقاق المعادلة (1.1.68) من حيث (ϑ،u_i) ، وهكذا المعادلة (1.1.79) تمثل جزءًا لا يتجزأ من الطاقة الحرارية المرنة المرتبطة بالمعادلة (1.1.68).

1.1.3 قانون التوازن العالمي من حيث (q_i،S_{ij}) :

من أجل الحصول على جزء لا يتجزأ من الطاقة المرتبطة بعملية اللدائن الحرارية من حيث (q_i ،S_{ij}) ، نضرب المعادلة *(1.1.69)* بواسطة S_{ij} و المعادلة *(1.1.69)* بواسطة q_i حتى نحصل على :

$$(\rho^{-1}S_{ik,\ k})_{,j}\ S_{ij} - K_{ijkl}S_{ij}S_{kl} + C_{S^{-1}}A_{\ ij}S_{ijqk,k}$$

$$= -(\rho^{-1}b_i\ )_{,j}\ S_{ij} + C_{S^{-1}}\ A_{ij}S_{ij}r. \qquad (1.1.80)$$

و

$$(C_{S^{-1}}\ q_{k,k})_{,i}q_i - \lambda_{ij}q_iq_j + \theta_0(C_{S^{-1}}\ A_{pq}S_{pq})_{,i}q_i = (C_{S^{-1}}\ r)_{,i}q_i\ .$$
(1.1.81)

بشرط :

$$(\rho^{-1}S_{ik,\ k})_{,j}\ S_{ij} = (\rho^{-1}S_{ik,k}S_{ij})_{,j} - \rho^{-1}S_{ik,k}S_{ij\ ,j}\ ,$$
(1.1.82)

$$(C_{S^{-1}}q_{k,k})_{,i}q_i = (C_{S^{-1}}q_{k,k}q_i)_{,i} - C_{S^{-1}}\mathrm{S}\ q_{k,k}q_{i\ ,i}\ ,$$
(1.1.83)

$$(C_{S^{-1}}A_{pq}S_{pq})_{,i}\ q_i = (C_{S^{-1}}A_{pq}S_{pq}q_i\ )_{,i} - C_{S^{-1}}A_{pq}S_{pq}q_{i\ ,i},$$
(1.1.84)

من خلال دمج المعادلة (1.1.80) و المعادلة (1.1.81) باستخدام نظرية الاختلاف ، نجد :

$$\int_{\partial B}^{\cdot} \rho^{-1} S_{ik,k} S_{ij} n_j da - \int_{B}^{\cdot} \rho^{-1} S_{ik,k} S_{ij,j}\, dv$$

$$- \int_{B}^{\cdot} k_{ijkl}\, S_{ij} S_{kl}\, dv + \int_{B}^{\cdot} C_{S^{-1}} A_{ij} S_{ij} q_{k,\ k}\, dv$$

$$= \int_{B}^{\cdot} (p^{-1} b_i)_{,\ j} S_{ij}\, dv + \int_{B}^{\cdot} C_{S^{-1}} A_{ij} S_{ij} r\, dv. \qquad (1.1.85)$$

و

$$\frac{1}{\theta 0} \int_{\partial B}^{\cdot} C_{S^{-1}}\, q_{k,k} q_i n_i da - \frac{1}{\theta 0} \int_{B}^{\cdot} C_{S^{-1}}\, q_{k,k} q_{i\ ,i}\ dv$$

$$- \frac{1}{\theta_0} \int_{B}^{\cdot} \lambda_{ij} q_i q_j\ dv + \int_{\partial B}^{\cdot} C_{S^{-1}} A_{pq} S_{pq} q_i n_i da$$

$$- \int_{B}^{\cdot} C_{S^{-1}} A_{pq} S_{pq}\, q_{i\ ,i}\ dv = \frac{1}{\theta_0} \int_{B}^{\cdot} (C_{S^{-1}}\, r)_i q_i dv. \qquad (1.1.86)$$

عند إضافة المعادلتين (1.1.85) و (1.1.86) ، بعد إعادة ترتيب الشروط ، وصلنا إلى

$$\frac{d}{dt}\{ \frac{1}{2} \int_{B}^{\cdot} \rho^{-1} S_{ik,\ k} S_{ij,\ j}\, dv + \frac{1}{2} \int_{B}^{\cdot} k_{ijkl} S_{ij} S_{kl}\, dv + \frac{1}{2\theta 0} \int_{B}^{\cdot} C_{\ S^{-1}}\, (q_{k,k})^2\, dv\}$$

$$+ \frac{1}{\theta 0} \int_{B}^{\cdot} \lambda_{ij} q_i q_j\, dv =$$

$$\int_{B}^{\cdot} \{ (\rho^{-1} b_i)_{,j}\, S_{ij} - C_{\ S^{-1}} A_{ij} S_{ij} r - \theta^{-10} (C_{\ S^{-1}} r)_{,i} q_i \}\, dv$$

$$+ \int_{\partial B}^{\cdot} \{ \rho^{-1} S_{ik,\ k} S_{ij} n_j + C_{\ S^{-1}} S\, (A_{pq} S_{pq} + \theta^{-10} q_{k,k})\, q_i n_i \}\, da.$$

(1.1.87)

هذا هو المطلوب للحصول على قانون التوازن العالمي من حيث الزوج (q_i ، S_{ij}).
بشكل عام، قوانين التوازن (1.1.79) و (1.1.87) تتعلق بهيكل حراري عام متباين الخواص. يمكن الحصول بسهولة على نظرائهم في الجسم المتناحي باستخدام العلاقات (1.1.52–56) و (1.1.70). يشير تحليل عام للمعادلات المحلية (1.1.42–46) أو (1.1.47–51) إلى أن هذه المعادلات من النوع المكافئ القطعي (.Kupradze et al، 1979) ، أي أنها تصف الاضطرابات بالحرارة الحرارية التي تنتشر بسرعات لانهائية. تم تأكيد هذه النتيجة أيضًا من خلال فحص الحلول الواضحة لعدد من المشكلات النموذجية المتمثلة في المرونة الحرارية الكلاسيكية (Nowacki، 1975). دعونا نلاحظ أن هذا يتعارض مع حقيقة أساسية في الفيزياء: لفترة زمنية محدودة [0 ، ر] ، د يؤدي اضطراب الدعم المحدود إلى توليد استجابة للدعم المحدد فقط. من أجل القضاء على هذا التناقض (أو عدم الاتساق) ، ظهر عدد من التعديلات على المرونة الحرارية الكلاسيكية في الأدب على مدار المائة عام الماضية أو نحو ذلك. سيعالج الجزء التالي من هذا الفصل إحدى النظريات المعدلة: المرونة الحرارية مع وقت استرخاء واحد.

الفصل الثاني

أساسيات المرونة الحرارية مع وقت استرخاء واحد

1.2.1-الاعتبارات الأساسية:

نشأت نظرية المرونة الحرارية مع وقت استرخاء واحد نتيجة لتعديل معادلة التوصيل الحراري (1.1.29) في القسم 1.1 ، الذي اقترحه في الأصل ماكسويل (1867) في سياق نظرية الغازات ، وبعد ذلك من قبل كاتانيو (1948) في سياق التوصيل الحراري في الأجسام الصلبة. يؤدي حساب مثل هذا التغيير في وصف العملية الحرارية المرنة في جسم مشوه – كما اقترح من قبل لورد و شولمان (1967) 9 – إلى نظام المعادلات التالي ، المتوافق مع (1.1.24–1.1.29) :

$$E_{i,j} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \qquad (1.2.1)$$

$$S_{ij,j} + b_i = pu_i \qquad (1.2.2)$$

$$\theta_0 \eta = q_{i,i} + r, \qquad (1.2.3)$$

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} + M_{ij} \vartheta \qquad (1.2.4)$$

$$\theta_0 \eta = -\theta_0 M_{ij} E_{ij} + C_E \vartheta \qquad (1.2.5)$$

$$L_{qi} = -K_{ij} \vartheta_{,j}, \qquad (1.2.6)$$

حيث L هو عامل تشغيل النموذج:

$$L = 1 + t_0 \partial / \partial t, \qquad (1.2.7)$$

و t0 هو وقت الاسترخاء المزعوم ، الذي يرضي الحالة:

$$t_0 > 0. \qquad (1.2.8)$$

تقتصر نظرية L – S الموصوفة في العلاقات (1.2.1) – (1.2.8) على الحالة التي يتم فيها تقليل توتر المرات من أوقات الاسترخاء إلى جزء كروي ؛ في هذه الحالة ،المعادلة رقم(1.2.7)ل (Lord and Shulman، 1967) يمكن بسهولة تقليلها إلى المعادلة (1.2.6).

في المعادلات(1.2.1–1.2.6) يكون لجميع الرموز معنى مماثل لتلك الموجودة في النظام (1.1.24–29). على وجه الخصوص ، نفترض أن جميع الوظائف المادية مقيدة بنفس التفاوتات التأسيسية كما في النظرية الكلاسيكية. يستنتج من تحليل القسم "1.1" أن عملية اللدائن الحرارية الموصوفة بواسطة المعادلات(1.2.1–1.2.6) ترضي علاقات التشريد والإزاحة المتماثلة ، ومعادلات التوازن الديناميكية ، وقانون الحفاظ على الطاقة ، وعدم المساواة في التبديد فقط.

يمكن العثور على دراسة استقصائية للنتائج المتعلقة بنظرية L–S في (Ignaczak ، 1981، 1987، 1989a) (انظر أيضًا (Lebon، 1982 ؛ Pao and Banerjee، 1978 ؛ Kaliski، 1965)).

كعملية حرارية كلاسيكية. هذا ينطبق مع تحذير واحد: عدم المساواة في التبديد

$q_i \vartheta_{,i} \leq 0$ مناسب طالما أن المصطلح $t_0 q_i \vartheta_{,i}$"صغير" بالنسبة لمصطلح

$k_{ij} \vartheta_{,i} \vartheta_{,j}$ ، وهذا صحيح بشرط t_0 معامل صغير.

الملاحظة 1.1 تطيع نظرية L–S المعادلات الحاكمة للدنة الحرارية الممتدة الخطية التي يتم فيها تلبية القوانين الأولى والثانية للديناميكا الحرارية بشكل مماثل بالمعنى التالي. نمد مجال الطاقة الحرة ψ ليشمل ناقل تدفق الحرارة q_i في مجموعة من المتغيرات المستقلة. وبعبارة أخرى ، نحن نفترض ذلك:

$$\psi = \psi\left(E_{ij}, \theta_{,qi}\right). \qquad \text{(R1.1.1)}$$

ثم ، الطاقة الداخلية e هي أيضًا دالة لهذه المتغيرات

$$e = e\left(E_{ij}, \theta_{,qi}\right), \qquad \text{(R1.1.2)}$$

والمضي قدماً للحصول على معادلات المجال من المرونة الحرارية الكلاسيكية [انظر للمعادلات (1.1.12) – (1.1.1)] نجد أن القانون الثاني الممتد للديناميكا الحرارية يأخذ شكل [انظر للمعادلة (1.1.10)]

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_i} q_i + \frac{q_i \theta_{,i}}{\theta} \le 0, \qquad \text{(R1.1.3)}$$

في حين تمت كتابة قانون الحفاظ على الطاقة الممتدة على النحو التالي [انظر للمعادلة(1.1.12)]

$$\theta\eta = -q_{i,r} + r - \frac{\partial \psi}{\partial q_i} q_{i.} \qquad \text{(R1.1.4)}$$

بعد ذلك ، من خلال ترك $\psi = \psi\left(E_{ij}, \theta, q_i\right)$ في النموذج [انظر للمعادلة (1.1.15)]

$$\psi\left(E_{ij}, \theta, q_i\right) = \frac{1}{2} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + M_{ij} E_{ij} \vartheta - \frac{C_E}{2\theta_0} \vartheta^2 + \frac{t_0}{2\theta_0} \lambda_{ij} q_i q_j, \qquad \text{(R1.1.5)}$$

باستعادة المعادلات((1.2.1.)و (1.2.2)و(1.2.4) و(1.2.5)) لاستعادة قانون الحفاظ على الطاقة الخطية (1.2.3) ، استبدلنا المصطلح ̇θη بالمصطلح ̇η̇0η ، وتجاهلنا مصطلح الترتيب الثاني على RHS في المعادلة(R.1.2.4)

أخيرًا ، لإثبات أن القانون الثاني للديناميكا الحرارية [المعادلة (R1.1.3)] فعال ، نستخدم المعادلتين (R1.1.3) و (R1.1.5) ، ونحصل على

$$\frac{t_0}{\theta_0}\lambda_{ij}q_j q_i + \frac{q_i\theta_{,i}}{\theta} \le 0 \qquad \text{(R1.1.6)}$$

او

$$q_i\left(\frac{t_0}{\theta_0}\lambda_{ji}q_j + \frac{\theta_{,i}}{\theta}\right) \le 0 \qquad \text{(R1.1.7)}$$

انظر للمعادلة(1.2.6)

$$q_i + t_0 q_i = -k_{ij}\theta_{,j}, \qquad \text{(R1.1.8)}$$

لذلك ، بضرب المعادلة(R1.1.8) بواسطة $\lambda_{ia} = \lambda_{ai} = (k_{ai})^{-1}$ فنحصل على

$$\lambda_{ai}q_i + t_0\lambda_{ai}q_i = \theta_{,a}, \qquad \text{(R1.1.9)}$$

او

$$\frac{t_0\lambda_{ij}q_j}{\theta_0} + \frac{\theta_{,i}}{\theta} = -\frac{1}{\theta_0}\lambda_{ij}q_j - \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta}\right)\theta_{,i}, \qquad \text{(R1.1.10)}$$

ثم نقوم بضرب المعادلة (R.1.1.10) ب q_i وندع $\theta = \theta_0$ في النصف الثاني على RHS للمعادلة الناتجة ، نحصل على :

$$q_i\left(\frac{t_0\lambda_{ij}q_j}{\theta_0} + \frac{\theta_{,i}}{\theta}\right) = -\frac{1}{\theta_0}\lambda_{ij}q_i q_j. \qquad \text{(R1.1.11)}$$

المعادلة (R1.1.11) مع الدقة الإيجابية للموتر λ_{ij} تعني أن القانون الثاني الممتد للديناميكا الحرارية في النموذج (R1.1.7) مناسب بشكل مماثل. نتيجة لذلك ، تمثل نظرية L – S مرونة حرارية ممتدة خطية يتم استيفاء القوانين الأول والثاني للديناميكا الحرارية الممتدة بشكل مماثل.

بتحديد معادلات (1.2.1–1.2.6) للمرونة الحرارية مع وقت استرخاء واحد. نجد نموذج بديل لنظام المعادلات هذا هو النظام التالي (معادلات الاسترجاع (37–1.1.32)):

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \qquad (1.2.9)$$

$$S_{ij,j} + b_i = pu_i, \qquad (1.2.10)$$

$$\theta_0 \eta = -q_{i,i} + r, \qquad (1.2.11)$$

$$E_{ij} = K_{ijkl} S_{kl} + A_{ij} \vartheta, \qquad (1.2.12)$$

$$\theta_0 \eta = \theta_0 A_{ij} S_{ij} + C_s \vartheta, \qquad (1.2.13)$$

$$\vartheta_{,i} = -\lambda_{ij}\left(q_j + t_0 q_j\right). \qquad (1.2.14)$$

تمامًا كما في القسم 1.1 ، نقدم هنا مفهوم الجسم بالحرارة مع وقت استرخاء واحد وعملية بالحرارة مع وقت استرخاء واحد.

الآن ، من خلال استقصاء المتغيرات E_{ij} و S_{ij} و η و q_i من المعادلات (1.2.1 – 1.2.6) ، نحصل على معادلات مجال درجة حرارة الإزاحة

$$\left(C_{ijkl} u_{k,l}\right)_{,j} - pu_i + \left(M_{ij}\vartheta\right)_{,j} = -b_i, \qquad (1.2.15)$$

$$\left(k_{ij}\vartheta_{,j}\right)_{,i} - C_E \vartheta + \theta_0 M_{ij} u_{i,j} = -r,$$

حيث انها تدل إلى تأثير العامل L ، أي للدالة على f حيث $B \times (0,\infty)$,

$$f = Lf \qquad (1.2.16)$$

علاوة على ذلك ، عند استبعاد u_i و E_{ij} و η و ϑ من المعادلات (1.2.9–14) ، نحصل على معادلات المجال من حيث الزوج (S_{ij} ، q_i)

$$\left(p^{-1}S_{(ik,k)}\right)_{,j)} - k_{ijkl}S_{kl} + C_s^{-1}A_{ij}q_{k,k} = -\left(p^{-1}b_{(i}\right)_{,i)} + C_s^{-1}A_{ij}r$$

$$\left(C_s^{-1}q_{k,k}\right)_{,i} - \lambda_{ij}q_j + \theta_0\left(C_s^{-1}A_{pq}S_{pq}\right)_{,i} = \left(C_s^{-1}r\right)_{,i}. \qquad (1.2.17)$$

بمقارنة المعادلات (1.1.68) و (1.1.69) مع المعادلات (1.2.15) و (1.2.17) نلاحظ وجود تشابه رسمي بين هاتين المجموعتين من المعادلات ، حيث تبدو المعادلة (1.2.15) تقدم " تعديل أكبر من المعادلة (1.2.17) بالنسبة إلى المعادلات (1.1.68) و (1.1.69) ، على التوالي.

1.2.2 قانون التوازن العالمي من حيث (ui، ϑ):

يرتبط قانون التوازن هذا بالمعادلات (1.2.1–6) و (1.2.15). نستخرج باستخدام L في (1.2.1–5) ونوظف الرموز في (1.2.16) ، نصل الى"10"

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \qquad (1.2.18)$$

$$S_{ij,j} + b_i = pu_i, \qquad (1.2.19)$$

$$\theta_0\eta = -q_{i,i} + r, \qquad (1.2.20)$$

$$S_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} + M_{ij}\theta, \qquad (1.2.21)$$

$$\theta_0\eta = -\theta_0 M_{ij}E_{ij} + C_E\vartheta, \qquad (1.2.22)$$

$$q_i = -k_{ij}\vartheta_{,j}. \qquad (1.2.23)$$

من خلال المتابعة بطريقة مماثلة لتلك التي تنطوي على المعادلات (1.1.71-1.1.75) و باستخدام المعادلات (1.2.18) ، (1.2.19) و (1.2.21) – نحصل على

$$\int_{\partial B} u_i s_{ij} n_j da + \int_B b_i u_i d\nu$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_B \left(C_{ijkl}E_{ij}E_{kl} + pu_i u_i\right)d\nu + \int_B M_{ij}E_{ij}\vartheta d\nu. \qquad (1.2.24)$$

من المعادلات (1.2.20)، (1.2.22) و (1.2.23) نجد التالي

$$C_E\vartheta - \theta_0 M_{ij}E_{ij} = -q_{i,i} + r \qquad (1.2.25)$$

و

$$C_E\vartheta - \theta_0 M_{ij}E_{ij} = \left(k_{ij}\vartheta_{,j}\right)_{,j} + r. \qquad (1.2.26)$$

للحصول على المعادلات (1.2.18) – (1.2.22) ، نستخدم أيضًا الفرضية القائلة بأن الدوال المادية في المعادلات (1.2.1) – (1.2.6) لا تعتمد على الوقت ، وينتقل L بالمشتقات الجزئية المكانية . بالتالي ،

$$M_{ij}E_{ij}\vartheta = \frac{C_E}{\theta_0}\vartheta\vartheta - \frac{\left(k_{ij}\vartheta_{,j}\right)_{,i}\vartheta}{\theta_0} - \frac{r\vartheta}{\theta_0}, \qquad (1.2.27)$$

او

$$M_{ij}E_{ij}\vartheta = \frac{1}{2\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(C_E\vartheta^2\right)$$

$$+\frac{1}{\theta_0}k_{ij}\vartheta_{,i}\vartheta_{,j} + \frac{t_0}{2\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(k_{ij}\vartheta_{,i}\vartheta_{,j}\right) - \frac{\left(k_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta\right)_{,i}}{\theta_0} - \frac{r\vartheta}{\theta_0} \qquad (1.2.28)$$

تكامل المعادلة (1.2.28) على B ، واستخدام نظرية الاختلاف

$$\int_B M_{ij} E_{ij} \vartheta d\nu = \frac{1}{2\theta_0} \frac{d}{dt} \int_B C_E \vartheta^2 d\nu + \frac{t_0}{2\theta_0} \frac{d}{dt} \int_B k_{ij} \vartheta_{,i} \vartheta_{,j} d\nu$$

$$+ \frac{1}{\theta_0} \int_B k_{ij} \vartheta_{,i} \vartheta_{,j} d\nu - \frac{1}{\theta_0} \int_{\partial B} \vartheta k_j \vartheta_{,j} n_{,i} da - \frac{1}{\theta_0} \int_B r \vartheta d\nu \qquad (1.2.29)$$

أخيرًا ، بجمع المعادلة (1.2.24) مع المعادلة (1.2.29) ، وصلنا إلى

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_B p u_i u_i d\nu + \frac{1}{2} \int_B C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} d\nu \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\theta_0} \int_B C_E \vartheta^2 d\nu + \frac{t_0}{2\theta_0} \int_B k_i \vartheta_{,i} \vartheta_{,j} d\nu \} + \frac{1}{\theta_0} \int_B k_{ij} \vartheta_{,i} \vartheta_{,j} d\nu \quad (1.2.30)$$

$$\int_{\vartheta B} u_i S_{ij} n_j da + \int_B u_i b_i d\nu + \frac{1}{\theta_0} \int_{\vartheta B} \vartheta k_{ij} \vartheta_{,j} n_{,i} da + \frac{1}{\theta_0} \int_B r \vartheta d\nu.$$

بالمقارنة مع العلاقة التناظرية (1.1.79) من المرونة الحرارية الكلاسيكية ، فإن العلاقة (1.2.30) هي قانون التوازن العالمي الذي يحتوي على طاقة لدن حراري ذات درجة أعلى في الوقت المناسب .11

1.2.3قانون التوازن العالمي من حيث (S_{ij} ،q_i):

ويرتبط هذا القانون مع المعادلة (1.2.17)، نظرًا لحقيقة أن المعادلة(1.2.17) لا تمثل سوى تعديل صغير من المعادلة (1.1.69) ، يتم الحصول على تكامل عالمي للطاقة من خلال المعادلة (1.2.17) عن طريق تعديل صغير للطريقة.

و تم الحصول على قانون درجة حرارة التشرد العالمي (1.2.30) هنا لأول مرة. و يمكن العثور على شكل معين من أشكال المعادلة (1.2.30) يتعلق بجسم حراري متناظر في (Ignaczak، 1982).

النتيجة (1.1.87). بعد ذلك ، نحصل على قانون التوازن العالمي من حيث (s_{ij}، q_i) من أجل المرونة الحرارية مع وقت استرخاء واحد

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_B p^{-1}s_{ik,k}s_{ij,j}d\nu+\frac{1}{2}\int_B K'_{ijkl}S_{ij}S_{kl}d\nu+\frac{1}{2\theta_0}\int_B C_s^{-1}(qk,k)^2 d\nu\right.$$

$$\left.+\frac{t_0}{2\theta_0}\int_B \lambda_{ij}q_iq_jd\nu\right\}+\frac{1}{\theta_0}\int_B \lambda_{ij}q_iq_jd\nu$$

$$=\int_B\left\{\left(p^{-1}b_i\right)_{,j}S_{ij}-C_s^{-1}A_{ij}S_{ij}r-\theta_0^{-1}\left(C_s^{-1}r\right)_{,i}q_i\right\}d\nu$$

$$+\int_{\partial B}\left\{p^{-1}S_{ik,k}S_{ij}n_j+C_s^{-1}\left(A_{pq}S_{pq}+\theta_0^{-1}{}_{qk,k}\right)q_in_i\right\}da \qquad (1.2.31)$$

على الرغم من وجود تشابه رسمي بين قوانين التوازن المحلية والعالمية الخاصة بالمرونة الحرارية الكلاسيكية والمرونة الحرارية مع وقت استرخاء واحد ، تصف تلك القوانين عمليات مختلفة نوعيًا طالما أن وقت الاسترخاء إيجابي. في الواقع ، يمكن للمرء أن يوضح أن معادلات المجال (1.2.15) من النوع القطعي – أي أنها تصف اضطراب بالحرارة ينتشر بسرعات محدودة – في تناقض مع معادلات (1.1.68).

الملاحظة 1.2 في محاولة لنمذجة عمليات فائقة السرعة من المرونة الحرارية اقترح Tzou عام (1997) نموذجًا لمرحلة تأخر ثنائية الطور (DPLM) من المرونة الحرارية يتم فيه استبدال معادلة ماكسويل–كاتانيو (1.2.6) بالعلاقة

$$q_i+\mathrm{T}_q q_i=-k_{ij}\left(\vartheta+\mathrm{T}r\vartheta\right)_{,j} \qquad (R1.2.1)$$

بينما تبقى المعادلات (1.2.5) – (1.2.1) كما هي ؛ إن τq و τT في المعادلة (R1.2.1) يقفان على تأخر تدرج الحرارة وتدرج درجة الحرارة على التوالي $\tau q \geq 0$ ، $\tau T \geq 0$. بوضوح ، يغطي DPLM طراز L–S القطعي الزائد عند $\tau q = t0 > 0$

و $\tau T = 0$. و ، من خلال ترك $k_{ij} = k\sigma_{ij}$, و $\tau T = \tau q \xi$ في المعادلة (R1.2.1)، حيث $k > 0$ و $0 < 1 > \xi$ ، محصوراً بجسم صلب ، يتم الحصول على موصل حراري جيفري موحد الخواص.

أيضا ، يمكن للمرء أن يوضح أن DPLM ، مقيد بموصل حرارة صلب متناظر ، يقلل إلى: (i) موصل حراري قطعي إذا كانت $\tau = \tau q - \tau T > 0$، (ii) موصل حراري مكافئ إذا $\tau = \tau q - \tau T = 0$ و (3) موصل حر بيضاوي الشكل إذا كانت $\tau = \tau q - \tau T < 0$. لإظهار ذلك ، أدخل تحول المرحلة

$$\tau^* = t + - \tau T \qquad (R1.2.2)$$

تم الحصول على القانون العالمي لتدفق الحرارة (1.2.31) هنا لأول مرة. يتم الحصول على القانون في (Ignaczak، 1979) للحصول على جسم حراري متناظرة متساوي التوتر.

ولأي وظيفة $f = f(x,t^*)$ حدد الرموز $[x \in B, t^* \geq \tau T]$

$$f = \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t^*}\right) f, \qquad (R1.2.3)$$

$$f = \left(1 - \tau_T \frac{\partial}{\partial t^*}\right) f, \qquad (R1.2.4)$$

حيث

$$\tau = \tau_q - \tau_T. \qquad (R1.2.5)$$

ثم المعادلة

$$q_i\left(x, t + \tau_q\right) = -kT_{,i}\left(x, t + \tau_T\right) \qquad (R1.2.6)$$

يأخذ النموذج

$$q_i\left(x,t^*+\tau\right)=-kT_{,i}\left(x,t^*\right), \qquad \text{(R1.2.7)}$$

بينما معادلة الطاقة

$$C_p\mathrm{T}\left(x,t\right)=-q_{i,i}\left(x,t\right) \qquad \text{(R1.2.8)}$$

يتم تخفيض ل

$$C_p\mathrm{T}\left(x,t^*-\tau_T\right)=-q_{i,i}\left(x,t^*-\tau_T\right). \qquad \text{(R1.2.9)}$$

توسيع المعادلتين (R1.2.7) و (R1.2.9) في سلسلة Taylor في حالة $\tau \approx 0$ و $\tau T \approx 0$ ، وباستخدام الترميزين (R1.2.3) و (R1.2.4) نحصل على

$$q_i\left(x,t^*\right)=-k\,\mathrm{T}_{,i}\left(x,t^*\right) \qquad \text{(R1.2.10)}$$

و

$$-q_{i,i}\left(x,t^*\right)=C_p\mathrm{T}\left(x,t^*\right). \qquad \text{(R1.2.11)}$$

تطبيق عامل التشغيل "hut" [راجع المعادلة (R1.2.3)] على (R1.2.11) الذي نحصل عليه

$$-q_{i,i}\left(x,t^*\right)=C_p\mathrm{T}\left(x,t^*\right). \qquad \text{(R1.2.12)}$$

أيضًا ، بتطبيق عامل التشغيل "div" على المعادلة (R1.2.10) واستبدال النتيجة في المعادلة (R1.2.12) نحصل على

$$KT_{,ii}\left(x,t^*\right)=C_pT\left(x,t^*\right), \qquad \text{(R1.2.13)}$$

أو القسمة على k واستخدام تعريف عامل التشغيل "∽" [انظر للمعادلة (R1.2.4)] نحصل على

$$\left(1-\tau_T \frac{\partial}{\partial t^*}\right)\left[\nabla^2 T - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t^*}\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t^*}\right)T\right]=0, \qquad k=k\ /C_p \qquad \text{(R1.2.14)}$$

بالإضافة إلى ذلك ، لنموذج مع زمن ساكن

$$T(x,\tau_T)=\dot{T}(x,\tau_T)=\ddot{T}(x,\tau_T)=0 \qquad \left(.=\partial/\partial t^*\right) \qquad \text{(R1. 2. 14)}$$

المعادلة (R1.2.14) مكافئ ل

$$\nabla^2 T - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t^*}\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t^*}\right)T=0. \qquad \text{(R1. 2. 14)}$$

نتيجة لذلك ، فإن النظرية التالية صحيحة

النظرية 1.1 في الإطار الزمني $(t \geq 0)$ $t^* = t + \tau T$ تخضع درجة حرارة نموذج تأخر الطور المزدوج ذي الزمن الساكن لمعادلة قطعية إذا كانت $\tau = \tau q - \tau T > 0$ ، بمعادلة إهليلجيه إذا $\tau = \tau q - \tau T < 0$ ، وبواسطة معادلة مكافئ إذا كانت $\tau = \tau q - \tau T = 0$. نظرًا لأن نوع المعادلة ثابت فيما يتعلق بنقطة الطور ، فإن نموذج تأخر الطور المزدوج هو القطعي ، ولإهليلجي ، والمكافئ لـ $\tau > 0$ و $\tau < 0$ و $\tau = 0$ على التوالي. أخيرًا ، لاحظ أن حالة $\tau < 0$ تصف نموذج تفاعل فونون –إلكترون فائق السرعة على مجهر حيث تكون قيم τT و τq بترتيب البيكوسيكندات إلى فمتوثانية. بالنسبة للفيلم الذهبي الذي يخضع لتسخين ليزر قصير النبض ، وفقًا للجدول 5.1 في (Tzou، 1997) ، نحصل على:

$\tau T = 89.28$ PS، $\tau q = 0.74$ PS و $\tau = -88.54$ PS.

في هذه المرحلة ، يجب أن ننتقل إلى الإعداد لتعديل آخر من المرونة الحرارية الكلاسيكية ، والذي يلغي أيضًا مفارقة سرعات الانتشار اللانهائية. تستند هذه النظرية إلى عدم المساواة في تبديد المعمم وتقدم مرتين الاسترخاء في وصف عملية بالحرارة. أعطيت أسسها من قبل غرين وليندساي (1972) ، وفي ما يلي ، سوف نشير إليها على أنها نظرية G–L أو المرونة الحرارية مع زمني الاسترخاء.

الفصل الثالث

أساسيات المرونة الحرارية مع زمني استرخاء

1.3.1 الاعتبارات الأساسية:

في مكان المعادلات (1.1.1–1.1.4) لدينا الآن العلاقات

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \qquad (1.3.1)$$

$$S_{ij,j} + b_i = p\ddot{u}_i, \qquad (1.3.2)$$

$$\dot{e} = S_{ij}E_{ij} - q_{i,i} + r, \qquad (1.3.3)$$

$$\dot{\eta} \geq -\left(\frac{qi}{\phi}\right)_{,i} + \frac{r}{\phi}, \qquad (1.3.4)$$

انظر أيضًا (Muller، 1971 ؛ Green and Laws، 1972 ؛ Suhubi، 1975 ؛ و Erbay و S,uhubi، 1986).

حيث:

$$\phi = \phi\left(\theta, \dot{\theta}\right) > 0 \qquad (1.3.5)$$

هي دالة عددية لمتغيرين مستقلين يتم تحديدهما في ما يلي. من الواضح أن القوانين (1.3.1–3) متطابقة مع المعادلات (1.1.1–1.1.3) ، في حين أن عدم المساواة في المعادلة (1.3.4) ينخفض إلى المعادلة (1.1.4)، بشرط أن يتم تعيين φ على قدم المساواة مع θ. في هذا المعنى المعادلة (1.3.4) هو تعميم لعدم المساواة في تبديد الكلاسيكية. إلى جانب ما تقدم ، نقدم طاقة مجانية معممة

$$\psi = e - \eta\phi, \qquad (1.3.6)$$

و منها :

$$\dot{\psi} = \dot{e} - \dot{\eta}\phi - \eta\dot{\phi}, \qquad (1.3.7)$$

والعلاقات (1.3.3–4) ، المكتوبة من حيث الدالتين φ و ψ ، تأخذ الأشكال:

$$\dot{\psi} + \dot{\eta}\phi + \eta\dot{\phi} = S_{ij}\,\dot{E}_{ij} - q_{i,i} + r, \qquad (1.3.8)$$

$$\dot{\psi} + \eta\dot{\phi} - S_{ij}\,\dot{E}_{ij} + q_i\phi_{,i}\phi^{-1} \le 0. \qquad (1.3.9)$$

بالمقارنة مع المرونة الحرارية الكلاسيكية ، فإننا نوسع مجال ψ من خلال أخذ:

$$\psi = \psi\left(E_{ij,}\theta, \dot{\theta}, \theta_{,i}\right). \qquad (1.3.10)$$

من هذا ، نحصل على

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial E_{ij}}\dot{E}_{ij} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\ddot{\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta_{,k}}\dot{\theta}_{,k}\,. \qquad (1.3.11)$$

علاوة على ذلك ، يتم التعبير عن مشتقات ϕ كـ:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\ddot{\theta} \qquad (1.3.12)$$

$$\phi_{,i} = \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\theta_{,i} + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\theta_{,i}\,. \qquad (1.3.13)$$

باستخدام معادلات (1.3.11–1.3.13) يمكننا الان تقليل المعادلات (1.3.8) و (1.3.9) إلى النماذج:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial E_{ij}} - S_{ij}\right)\dot{E}_{ij} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta}$$

$$+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\eta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\ddot{\theta}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta_{,k}}\dot{\theta}_{,k}+\dot{\eta}\phi=-q_{i,i}+r, \qquad (1.3.14)$$

و

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial E_{ij}}-S_{ij}\right)\dot{E}_{ij}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\eta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\theta}}+\eta\frac{\partial\phi}{\partial\dot{\theta}}\right)\ddot{\theta}$$

$$+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta_{,k}}+\frac{qk}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\dot{\theta}}\right)\dot{\theta}_{,k}+\frac{qk}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\theta_{,k}\leq 0. \qquad (1.3.15)$$

دعونا الآن نفترض المعادلات التأسيسية في الأشكال

$$S_{ij}=\frac{\partial\psi}{\partial E_{ij}}, \qquad (1.3.16)$$

$$\eta=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\theta}}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\dot{\theta}}\right)^{-1}, \qquad (1.3.17)$$

$$qk=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta_{,k}}\right)\left(\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)^{-1}, \qquad (1.3.18)$$

ونقلل المعادلات (1.3.14) و (1.3.15) إلى:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\eta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta_{,k}}\dot{\theta}_{,k}+\dot{\eta}\phi=-q_{i,i}+r, \qquad (1.3.19)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\eta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta}+\frac{qk}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\theta_{,k}\leq 0. \qquad (1.3.20)$$

سنثبت الآن أن العلاقات (1.3.19) و (1.3.20) ، بالنسبة للجسم الحراري المرن الخطي ، مناسبة"14":

$$\phi=\theta_0+\vartheta+t_i\,\dot{\vartheta}, \qquad (1.3.21)$$

$$\psi = \frac{1}{2} C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} + M_{ij} E_{ij} \left(\vartheta + t_1 \dot{\vartheta} \right)$$

$$- \frac{C_E}{2\theta_0} \vartheta^2 - \frac{C_E}{2\theta 0} t_1 \vartheta \dot{\vartheta} - \frac{C_E}{2\theta_0} t_0 t_1 \dot{\vartheta}^2 + \frac{t_1}{2\theta_0} k_{ij} \vartheta_{,i} \vartheta_{,j}, \qquad (1.3.22)$$

حيث t_0 و t_1 هما معاملين ذو بعد زمني ، يناسبان حالة عدم المساواة "15"

$$t_1 \geq t_0 \geq 0, \qquad (1.3.23)$$

حيث الرموز المتبقية التي تظهر في المعادلات (1.3.21) و (1.3.22) لها نفس المعنى كما في المرونة الحرارية الكلاسيكية. لاحظ أنه ، كما $t_1 \to 0, \phi \to \theta$ و لدينا ψ تميل إلى الطاقة الحرة للجسم الحراري الكلاسيكي ، استرجع المعادلة (1.1.15) معتبرا أن :

$$\vartheta = \theta - \theta_0, \qquad (1.3.24)$$

"14"وظائف المعادلات (1.3.21) و (1.3.22) هي القيود المفروضة على تلك المقترحة من قبل غرين وليندساي (1972).

"15"يختلف وقت الاسترخاء t_0 في المعادلة (1.3.23)، بشكل عام ، عن القسم 1.2.

وباستخدام المعادلات (1.3.21) و (1.3.22) ، نجد ذلك

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 1, \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = t_1, \qquad (1.3.25)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = M_{ij} E_{ij} - \frac{C_E}{\theta_0} \left(\vartheta + t_1 \dot{\vartheta} \right), \qquad (1.3.26)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = t_1 \left[M_{ij} E_{ij} - \frac{C_E}{\theta_0} \left(\vartheta + t_0 \dot{\vartheta} \right) \right], \qquad (1.3.27)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta_{,k}} = \frac{t_1}{\theta_0} k_{ki} \vartheta_{,i}, \qquad (1.3.28)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial E_{ij}} = C_{ijkl} E_{kl} + M_{ij} \left(\vartheta + t_1 \dot{\vartheta} \right). \qquad (1.3.29)$$

من العلاقات (1.3.16) و (1.3.29) نحصل عليها:

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{ij} + M_{ij} \left(\vartheta + t_1 \dot{\vartheta} \right), \qquad (1.3.30)$$

بينما ، في ضوء المعادلات (1.3.17) ، (1.3.25) و (1.3.27) ، هناك:

$$\theta_0 \eta = -\theta_0 M_{ij} E_{ij} + C_E \left(\vartheta + t_0 \dot{\vartheta} \right). \qquad (1.3.31)$$

علاوة على ذلك ، تؤدي المعادلات (1.3.18) و (1.3.21) و (1.3.25) و (1.3.28) إلى:

$$q_k t_1 = -\left(\theta_0 + \vartheta + t_1 \dot{\vartheta} \right) \frac{t_1}{\theta_0} k_{ki} \vartheta_{,i} . \qquad (1.3.32)$$

بما أن المصطلحات $\vartheta \vartheta_{,i}$ و $\vartheta \dot{\vartheta}_{,i}$ قد تكون مهملة بالنسبة للجسم الحراري الخطي بالنسبة لـ $\vartheta_{,i}$ فإن المعادلة (1.3.32) تؤدي إلى: "16"

$$qk = -k_{kj} \vartheta_{,j} . \qquad (1.3.33)$$

لإثبات صحة المعادلتين (1.3.19) و (1.3.20) ، نقوم الآن بحساب المصطلح

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta. \qquad (1.3.34)$$

في ضوء المعادلتين (1.3.26) و (1.3.31) ، حصلنا على:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{C_E}{\theta_0} (t_1 - t_0) \dot{\vartheta}, \qquad (1.3.35)$$

ومنه :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\eta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta}=-\frac{C_E}{\theta_0}(t_1-t_0)\dot{\vartheta}^2, \qquad (1.3.36)$$

"16"تمثل المعادلة (1.3.33) قانون فورييه الكلاسيكي لتوصيل الحرارة [انظر الى المعادلة (1.1.20)].

بحيث يمكن كتابة معادلة توازن الطاقة (1.3.19) كـ:

$$-\frac{C_E}{\theta_0}(t_1-t_0)\dot{\vartheta}^2+\frac{t_1}{\theta_0}k_{kj}\vartheta_{,j}\,\dot{\vartheta}_{,k}+\dot{\eta}\left(\theta_0+\vartheta+t_1\dot{\vartheta}\right)=-q_{i,i}+r. \qquad (1.3.37)$$

الإهمال على الجانب الأيسر من كل الشروط أعلاه يتناسب مع $\dot{\theta}^2$ و $\vartheta_{,j}\,\dot{\vartheta}_{,k}$ و ϑE_{ij} و $\vartheta\dot{\vartheta}$ كنسبة صغيرة إلى التناسب مع $\dot{E}_{ij}$ و $\dot{\vartheta}$ و $\ddot{\vartheta}$، للعثور على الشكل الخطي التالي لتوازن الطاقة :

$$\theta_0\dot{\eta}=-q_{i,i}+r. \qquad (1.3.38)$$

من أجل إثبات صحة عدم المساواة في التبديد للمعادلة(1.3.20) ، نلاحظ أولاً ان :

$$\frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\sim\frac{1}{\theta_0}, \qquad (1.3.39)$$

و التي جنبا إلى جنب مع المعادلة (1.3.33) ، يؤدي إلى:

$$\frac{qk}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}0_{,k}=-\frac{1}{\theta_0}k_{ij}\vartheta_{,i}\vartheta_{,j}. \qquad (1.3.40)$$

عند اضافة المعادلة (1.3.36) و المعادلة (1.3.40) يعطي:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\eta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta}+\frac{qk}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\theta_{,k}=-\frac{C_E}{\theta_0}(t_1-t_0)\dot{\vartheta}^2-\frac{1}{\theta_0}k_{ij}\vartheta_{,i}\vartheta,j. \qquad (1.3.41)$$

لاحظ الآن أن الجانب الأيسر من المعادلة (1.3.41) مطابق للجانب الأيسر من عدم المساواة في المعادلة (1.3.20). وبالتالي ، فإن الإشارة إلى المعادلة

(1.3.23) وأوجه عدم المساواة المفترضة بالنسبة لـ C_E و θ_0 و K_{ij} في القسم 1.1 ، فإن الجانب الأيمن من المعادلة (1.3.41) غير إيجابي. هذا يعني ضمناً أن عدم المساواة في التبديد (1.3.20) يكون مناسب. نتيجة لذلك ، يمكن تعريف الجسم المرن بالحرارة الخطي زمني استرخاء بأنه الجسم الذي تفي فيه عملية اللدائن الحرارية

[U_i ، E_{ij} ، S_{ij} ، $q_{,\vartheta}$، q_i] بمعادلات المجال [انظر أيضًا للمعادلات (1.3.1)، (1.3.2)، (1.3.30)، (1.3.31)، 1.3.33) و (1.3.38)]

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + uj,i\right), \qquad (1.3.42)$$

$$S_{ij,j} + b_i = p\ddot{u}_i, \qquad (1.3.43)$$

$$\theta_0 \dot{\eta} = -q_{i,i} + r, \qquad (1.3.44)$$

$$S_{ij} = C_{jkl}E_{kl} + M_{ij}\left(\vartheta + t_1\dot{\vartheta}\right), \qquad (1.3.45)$$

$$\theta_0\eta = -\theta_0 M_{ij}E_{ij} + C_E\left(\vartheta + t_0\dot{\vartheta}\right), \qquad (1.3.46)$$

$$q_i = -k_{ij}\vartheta_{,j}, \qquad (1.3.47)$$

ما يلي هو نظام بديل للمعادلات يصف الجسم بالحرارة مع زمني الاسترخاء

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \qquad (1.3.48)$$

$$S_{ij,j} + b_i = p\ddot{u}_i, \qquad (1.3.49)$$

$$\theta_0\eta = -\dot{q}_{i,i} + r, \qquad (1.3.50)$$

$$E_{ij} = K_{ijkl}S_{kl} + A_{ij}\left(\vartheta + t_1\dot{\vartheta}\right), \qquad (1.3.51)$$

$$\theta_0\eta = \theta_0 A_{pq} S_{pq} + C_s\left(\vartheta + t_{(0)}\dot{\vartheta}\right) \qquad (1.3.52)$$

$$\vartheta_{,i} = -\lambda_{ij} q_j, \qquad (1.3.53)$$

حيث $t_{(0)}$ هو وقت استرخاء منخفض ، يتم تحديده من خلال:

$$t_{(0)} = \left(1 - \frac{C_E}{C_S}\right) t_1 + \frac{C_E}{C_S} t_0, \qquad (1.3.54)$$

وجميع الرموز المتبقية في المعادلات (1.3.48–1.3.53) لها نفس المعنى مثل الرموز الموجودة في المعادلات (1.1.32–1.1.37). بشرط:

$$C_s \geq C_E > 0, \qquad (1.3.55)$$

وأن عدم المساواة (1.3.23) مناسب ، لدينا:

$$t_1 \geq t_{(0)} \geq \left(1 - \frac{C_E}{C_s}\right) t_1 > 0. \qquad (1.3.56)$$

بطبيعة الحال ، في حالة وجود جسم غير متجانسة متباين الخواص ، تعد الأعداد القياسية C_S و C_E من وظائف الحالة ، وبالتالي فإن الدالة $t_{(0)}$ هي أيضًا وظيفة للحالة. نظام الوظائف [u_i، E_{ij}، S_{ij}، ϑ، η، q_i] الذي يتناسب اما مع المعادلات (1.3.42–1.3.47) أو مع المعادلات (1.3.48–1.3.53) حيث $(0,\infty) \times B$ و تسمى عملية بالحرارة مع زمني استرخاء

عند استقصاء S_{ij} و E_{ij} و η و q_i من المعادلات (1.3.42–1.3.47) ، نحصل على نظام المعادلات الحقلية من حيث (u_i،ϑ):

$$\left(C_{ijkl}u_{k,l}\right)_{,j} - p\ddot{u} + \left[M_{ij}\left(\vartheta + t_1\dot{\vartheta}\right)\right]_{,j} = -b_i,$$

$$\left(k_{ij}\vartheta_{,j}\right)_{,i} - C_E\left(\dot{\vartheta} + t_0\ddot{\vartheta}\right) + \theta_0 M_{ij}\dot{u}_{i,j} = -r. \qquad (1.3.57)$$

من أجل الحصول على وصف لعملية بالحرارة مع زمني استرخاء من حيث الزوج (ϑ، S_{ij}) ، فإننا نعتبر النظام (1.3.48–1.3.53) ،حيث تم استبدال المعادلة (1.3.53) بـ المكافئ (1.3.47). استبعاد المتغيرات (q_i , η , E_{ij} , u_i) وصلنا إلى

$$\left(p^{-1}S_{(ik,k}\right)_{,j)} - k_{ijkl}\ddot{S}_{kl} + A_{ij}L_1\ddot{\vartheta} = -\left(p^{-1}b_{(i}\right)_{,j)},$$

$$\left(k_{ij}\vartheta_{,j}\right)_{,i} - C_S L_{(0)}\dot{\vartheta} - \theta_0 A_{pq}\dot{S}_{pq} = -r, \qquad (1.3.58)$$

حيث،

$$L_1 = 1 + t_1\partial/\partial t, \qquad (1.3.59)$$

$$L_{(0)} = 1 + t_{(0)}\partial/\partial t. \qquad (1.3.60)$$

بوضوح ، معادلة الشد (1.3.58) تحتوي على $\dddot{\vartheta}$. سنبين الآن أنه يمكن استبدال النظام (1.3.58) بواحد بدون $\dddot{\vartheta}$. ولتحقيق هذه الغاية ، دعونا نفرق المعادلة (1.3.58) فيما يتعلق بالوقت ، حتى نحصل على :

$$\dddot{\vartheta} = -t_{(0)}^{-1}\left\{\ddot{\vartheta} + C_s^{-1}\left[\theta_0 A_{pq}\ddot{S}_{pq} - \left(K_{ij}\dot{\vartheta}_{,j}\right)_{,j} - \dot{r}\right]\right\}, \qquad (1.3.61)$$

و

$$L_1 \ddot{\vartheta} = \ddot{\vartheta} + t_1 \ddot{\vartheta} = -t_{(0)}^{-1}\left(t_1 t_0\right)\ddot{\vartheta}$$
$$-t_1 t_{(0)}^{-1} C_S^{-1}\left[\theta_0 A_{pq}\ddot{S}_{pq} - \left(k_{ij}\dot{\vartheta}_{,j}\right)_{,i} - \dot{r}\right]. \qquad (1.3.62)$$

استبدال المعادلة (1.3.62) في المعادلة (1.3.58) 1 ، نجد الآن الشكل التالي من معادلات المجال من حيث(S_{ij}و ϑ)"17":

$$\left(p^{-1}S_{(ik,k}\right)_{,j)} - \tilde{K}_{ijkl}\ddot{S}_{kl} - A_{ij}t_{(0)}^{-1}\left[t_{-1}C_S^{-1}(K_{pq}\dot{\vartheta}_{,q})_{,p} - \left(t_1 - t_{(0)}\right)\ddot{\vartheta}\right] = -\tilde{b}_{(ij)},$$

$$C_s^{-1}\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right)_{,p} - \left(\dot{\vartheta} + t_{(0)}\ddot{\vartheta}\right) - \theta_0 C_s^{-1} A_{pq}\dot{S}_{pq} = -C_S^{-1} r, \qquad (1.3.63)$$

حيث :

$$\tilde{K}_{ijkl} = K_{ijkl} - \frac{t_1}{t_{(0)}}\frac{\theta_0}{C_S}A_{ij}A_{kl}, \qquad (1.3.64)$$

$$\tilde{b}_{(ij)} = \left(p^{-1}b_{(i}\right)_{,j)} - \frac{t_1}{t_{(0)}}\frac{\dot{r}}{C_S}A_{ij}. \qquad (1.3.65)$$

نظرًا لأننا نهدف إلى صياغة مشكلات القيمة الأولية في نظرية G–L ، سنقوم الآن بتدوين قوانين التوازن العالمية المرتبطة بمعادلات المجال (1.3.57) و (1.3.63).

"17"تم الحصول على تقييد المعادلات (1.3.63) لجسم الخواص المتجانسة في (Ignaczak، 1978c).

2.3.1 قانون التوازن العالمي من حيث $(\vartheta\ ،ui)$:

بضرب المعادلة (1.3.43) خلال $\dot{u}_i$، والتكامل على B ، وكذلك باستخدام المعادلتين (1.3.42) و (1.3.45) ، وصلنا إلى:

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_B \frac{1}{2} p\dot{u}_i \dot{u}_i \, dv + \frac{1}{2}\int_B C_{ijkl} E_{ij} E_{kl} dv\right\} + \int M_{ij} \dot{E}_{ij}\left(\vartheta + t_1 \dot{\vartheta}\right) dv = \int_{\partial B} \dot{u}_i S_{ij} n_j da + \int_B \dot{u}_i b_i dv \qquad (1.3.66)$$

المعادلات (1.3.44) و (1.3.46–47) تعني ذلك:

$$C_E \overline{\left(\vartheta + t_0 \dot{\vartheta}\right)} - \theta_0 M_{ij} \dot{E}_{ij} = \left(K_{ij} \vartheta_{,j}\right)_{,i} + r. \qquad (1.3.67)$$

بعد ذلك ، نضرب المعادلة (1.3.67) بواسطة $\left(\vartheta + t_0 \dot{\vartheta}\right)$ ، نحصل على

$$C_E \left(\vartheta + t_0 \dot{\vartheta}\right)\overline{\left(\vartheta + t_0 \dot{\vartheta}\right)} - \theta_0 M_{ij} \dot{E}_{ij} \overline{\left(\vartheta + t_0 \dot{\vartheta}\right)} = \left[\left(k_{ij} \vartheta_{,j}\right)_{,i} + r\right]\left(\vartheta + t_0 \dot{\vartheta}\right), \qquad (1.3.68)$$

او

$$\frac{C_E}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vartheta + t_0 \dot{\vartheta}\right)^2 - \theta_0 M_{ij} \dot{E}_{ij}\left(\vartheta + t_1 \dot{\vartheta}\right) + \theta_0 M_{ij} \dot{E}_{ij}\left(t_1 - t_0\right)\dot{\vartheta} = \left[\left(k_{ij} \vartheta_{,j}\right)_{,i} + r\right]\left(\vartheta + t_0 \dot{\vartheta}\right). \qquad (1.3.69)$$

من ناحية أخرى ، بضرب المعادلة (1.3.67) بواسطة $\left(t_1 - t_0\right)\dot{\vartheta}$، نحصل على

$$C_E \left(t_1 - t_0\right)\dot{\vartheta}\overline{\left(\vartheta + t_0 \dot{\vartheta}\right)} - \theta_0 M_{ij} \dot{E}_{ij}\left(t_1 - t_0\right)\dot{\vartheta} = \left[\left(k_{ij} \vartheta_{,j}\right)_{,i} + r\right]\left(t_1 - t_0\right)\dot{\vartheta} \qquad (1.3.70)$$

الآن ، بإضافة المعادلة (1.3.69) إلى المعادلة (1.3.70) ، نجد

$$\frac{C_E}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vartheta+t_0\dot{\vartheta}\right)^2+\frac{C_E}{2}t_0\left(t_1-t_0\right)\frac{\partial}{\partial t}\dot{\vartheta}^2$$
$$+\left(t_1-t_0\right)C_E\,\dot{\vartheta}^2+k_{ij}\vartheta_{,j}\left(\vartheta+t_1\dot{\vartheta}\right),i-\theta_0 M_{ij}\,\dot{E}_{ij}\left(\vartheta+t_0\dot{\vartheta}\right) \qquad (1.3.71)$$
$$=\left[k_{ij}\vartheta_{,j}\left(\vartheta+t_1\dot{\vartheta}\right)\right],i+r\left(\vartheta+t_1\dot{\vartheta}\right).$$

بإجراء التكامل على B واستخدام نظرية الاختلاف ، نقوم بتحويل هذا إلى

$$\int_B M_{ij}\,\dot{E}_{ij}\left(\vartheta+t_1\dot{\vartheta}\right)dv=-\frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}\left(\vartheta+t_1\dot{\vartheta}\right)n_i k_{ij}\vartheta_{,j}da-\frac{1}{\theta_0}\int_B\left(\vartheta+t_1\dot{\vartheta}\right)rd\upsilon$$
$$+\frac{1}{2\theta_0}\frac{d}{dt}\left\{\int_B C_E\left(\vartheta+t_1\dot{\vartheta}\right)^2 d\upsilon+t_0\left(t_1-t_0\right)\int_B C_E\,\dot{\vartheta}^2\,d\upsilon+t_1\int_B k_{ij}\vartheta_{,i}\vartheta_{,j}d\upsilon\right\} \qquad (1.3.72)$$
$$+\frac{t_1-t_0}{\theta_0}\int_B C_E\,\dot{\vartheta}^2\,d\upsilon+\frac{1}{\theta_0}\int_B k_{ij}\vartheta_{,i}\vartheta_{,j}d\upsilon.$$

أخيرًا ، من خلال حذف المعادلات (1.3.66) و (1.3.72) من الحجم المتكامل الذي يحتوي على المتحول M_{ij} ، نحصل على قانون التوازن العالمي التالي من حيث (u_i، ϑ)

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_B p\dot{u}_{,i}\dot{u}_{,i}\,d\upsilon+\frac{1}{2}\int_B C_{ijkl}E_{ij}E_{kl}d\upsilon\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\theta_0}\int_B C_E\left[\left(\vartheta+t_0\dot{\vartheta}\right)^2+t_0\left(t_1-t_0\right)\dot{\vartheta}^2\right]d\upsilon+\frac{t_1}{2\theta_0}\int_B k_{ij}\vartheta_{,i}\vartheta_{,j}d\upsilon\right\}$$
$$+\frac{1}{\theta_0}\int_B k_{ij}\vartheta_{,i}\vartheta_{,j}d\upsilon+\frac{t_1-t_0}{\theta_0}\int_B C_E\,\dot{\vartheta}^2\,d\upsilon \qquad (1.3.73)$$
$$=\int_{\partial B}\dot{u}_i\,S_{ij}n_j da+\int_B\dot{u}_i\,b_i d\upsilon+\frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}n_i k_{ij}\vartheta_{,j}\left(\vartheta+t_1\dot{\vartheta}\right)da+\frac{1}{\theta_0}\int_B\left(\vartheta+t_1\dot{\vartheta}\right)rd\upsilon.$$

3.3.1. قانون التوازن العالمي من حيث (S_{ij}، ϑ):

يمثل هذا القانون تكامل الطاقة المرتبط بمعادلات المجال (1.3.63). سيتم اشتقاقها على افتراض أن $t_{(0)}$ لا يعتمد على الحالة. هذه الفرضية تكون مناسبة إما عندما حاصل C_E/C_S لا يعتمد على الحالة أو عند $t_1=t_{(0)}$ ؛ في الحالة الأخيرة $t_{(0)}=t_1$. ضرب المعادلة (1.3.63) بواسطة $\dot{S}_{ij}$ ، وصلنا إلى

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(p^{-1}S_{ik,k}S_{ij,j}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{K}_{ijkl}\dot{S}_{ij}\dot{S}_{kl}+A_{ij}\dot{S}_{ij}t_{(0)}^{-1}\left[t_1C_S^{-1}\left(k_{pq}\dot{\vartheta}_{,q}\right)_{,p}-\left(t_1-t_{(0)}\right)\ddot{\vartheta}\right]=b_{ij}\dot{S}_{ij}+\left(p^{-1}s_{ik,k}\dot{s}_{ij}\right)_{,j}. \quad (1.3.74)$$

بعد ذلك ، نأخذ تدرج المعادلة $(1.3.63)_2$ ونضربها ب $k_{is}\dot{\vartheta}_{,s,}$، نجد:

$$C_s^{-1}\left[\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right)_{,p}-\theta_0A_{pq}\dot{S}_{pq}\right]_{,i}K_{is}\dot{\vartheta}_{,s}-\left(\dot{\vartheta}+t_{(0)}\ddot{\vartheta}\right)_{,i}k_{is}\dot{\vartheta}_{,}s=-\left(C_S^{-1}r\right)_{,i}k_{is}\dot{\vartheta}_{,s}. \quad (1.3.75)$$

أيضا ، باستخدام المعادلة (1.3.63) 2 ، نحصل على

$$-C_S^{-1}\left[\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right)_{,p}-\theta_0A_{pq}\dot{S}_{pq}\right]\left(k_{is}\dot{\vartheta}_{,s}\right)_{,i}-k_{is}\dot{\vartheta}_{,i}\dot{\vartheta}_{,s}-t_{(0)}k_{is}\ddot{\vartheta}_{,i}\dot{\vartheta}_{,s}=-\left[\left(\dot{\vartheta}+t_{(0)}\ddot{\vartheta}-C_s^{-1}r\right)k_{is}\dot{\vartheta}_{,s}\right]_{,i}-\left(C_S^{-1}r\right)_{,i}k_{is}\dot{\vartheta}_{,s}. \quad (1.3.76)$$

ومن هذا:

$$
\begin{aligned}
& t_1 t_{(0)}^{-1} C_S^{-1} A_{pq} \dot{S}_{pq} \left(k_{is} \dot{\vartheta}_{,s} \right)_{,i} = t_1 t_{(0)}^{-1} \theta_0^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} C_S^{-1} \left[\left(k_{pq} \vartheta_{,q} \right)_{,p} \right]^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} t_{(0)} \frac{\partial}{\partial t} \left(k_{is} \dot{\vartheta}_{,i} \dot{\vartheta}_{,s} \right) + k_{is} \dot{\vartheta}_{,i} \dot{\vartheta}_{,s} \right\} \\
& - t_1 t_{(0)}^{-1} \theta_0^{-1} \left\{ \left[\left(\dot{\vartheta} + t_{(0)} \ddot{\vartheta} - C_S^{-1} r \right) k_{is} \dot{\vartheta}_{,s} \right]_{,i} + \left(C_S^{-1} r \right)_{,i} k_{is} \dot{\vartheta}_{,s} \right\}.
\end{aligned}
\tag{1.3.77}
$$

من الواضح أن الجانب الأيسر من المعادلة (1.3.77) مطابق للمصطلح الثالث على الجانب الأيسر من المعادلة (1.3.74). سنستخدم الآن المعادلة (1.3.63) 2 لتحديد المصطلح الرابع على الجانب الأيسر للمعادلة (1.3.74): معادلة الضرب (1.3.63)2 بواسطة $C_S^{-1} \ddot{\vartheta}$، نحصل على:

$$
\left(k_{pq} \vartheta_{,q} \right)_{,p} \ddot{\vartheta} - \theta_0 A_{pq} \dot{S}_{pq} \ddot{\vartheta} - C_s \left(\dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} + t_{(0)} \dot{\vartheta}^2 \right) = r \ddot{\vartheta}. \tag{1.3.78}
$$

بما ان:

$$
\begin{aligned}
\left(k_{pq} \vartheta_{,q} \right)_{,p} \ddot{\vartheta} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(k_{pq} \vartheta_{,q} \right)_{,p} \dot{\vartheta} \right] - \left(k_{pq} \dot{\vartheta}_{,q} \right)_{,p} \dot{\vartheta} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(k_{pq} \vartheta_{,q} \right)_{,p} \dot{\vartheta} \right] - \left(k_{pq} \dot{\vartheta}_{,q} \dot{\vartheta} \right)_{,p} + k_{pq} \dot{\vartheta}_{,q} \dot{\vartheta}_{,p},
\end{aligned}
\tag{1.3.79}
$$

في ضوء المعادلة (1.3.78) ، يصبح الحد الرابع على الجانب الأيسر للمعادلة (1.3.74)

$$
\begin{aligned}
& - t_{(0)}^{-1} \left(t_1 - t_{(0)} \right) A_{pq} \dot{S}_{pq} \ddot{\vartheta} = - \theta_0^{-1} t_{(0)}^{-1} \left(t_1 - t_{(0)} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(k_{pq} \vartheta_q \right)_{,p} \dot{\vartheta} \right] \right. \\
& \left. - \left(k_{pq} \dot{\vartheta}_{,q} \dot{\vartheta} \right)_{,p} + k_{pq} \dot{\vartheta}_{,q} \dot{\vartheta}_{,p} + r \ddot{\vartheta} - C_S \left(\dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} + t_{(0)} \ddot{\vartheta}^2 \right) \right\}.
\end{aligned}
\tag{1.3.80}
$$

بإضافة جوانب المعادلات (1.3.77) و (1.3.80) ، نحصل على

$$
\begin{aligned}
&A_{pq}\,\dot{S}_{pq}\,t_{(0)}^{-1}\left[t_{-1}C_S^{-1}\left(k_{pq}\,\dot{\vartheta}_{,q}\right)_{,p}-\left(t_1-t_{(0)}\right)\ddot{\vartheta}\right]\\
&=\frac{1}{2\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t_1}{t_{(0)}}\frac{\left[\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right)_{,p}\right]^2}{C_S}+t_1k_{is}\,\dot{\vartheta}_{,i}\,\dot{\vartheta}_{,s}-2\frac{t_{1-}t_{(0)}}{t_{(0)}}\left[\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right)_{,p}\dot{\vartheta}\right]\right.\\
&\left.+C_S\,\frac{t_1-t_{(0)}}{t_{(0)}}\dot{\vartheta}^2\right\}+\frac{1}{\theta_0}k_{pq}\,\dot{\vartheta}_{,p}\,\dot{\vartheta}_{,q}+\frac{C_S}{\theta_0}\left(t_1-t_{(0)}\right)\ddot{\vartheta}^2\\
&-\frac{1}{\theta_0}\left[\frac{t_1-t_{(0)}}{t_{(0)}}\ddot{\vartheta}+\frac{t_1}{t_{(0)}}\left(C_S^{-1}r\right)_{,i}k_{is}\,\dot{\vartheta}_{,s}\right]-\frac{1}{\theta_0}\left[\left(\dot{\vartheta}+t_1\,\ddot{\vartheta}-\frac{t_1}{t_{(0)}}\frac{r}{C_S}\right)k_{is}\,\dot{\vartheta}_{,s}\right]_{,i}.
\end{aligned}
\tag{1.3.81}
$$

الان، بما ان :

$$
\begin{aligned}
&\frac{t_1}{t_{(0)}}\frac{\left[\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right)_{,p}\right]^2}{C_S}-2\left(\frac{t_1}{t_{(0)}}-1\right)\left[\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right)_{,p}\right]\dot{\vartheta}+C_S\,\frac{t_1-t_{(0)}}{t_{(0)}}\dot{\vartheta}^2\\
&=\frac{t_1-t_{(0)}}{t_{(0)}}\left[\frac{\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right)_{,p}}{\sqrt{C_S}}-\sqrt{C_S}\,\dot{\vartheta}\right]^2+\frac{\left[\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right)_{,p}\right]^2}{C_S}.
\end{aligned}
\tag{1.3.82}
$$

العلاقة بالمعادلة (1.3.81) يمكن ان تكتب على الشكل:

$$
\begin{aligned}
&A_{pq}\,\dot{S}_{pq}\,t_{(0)}^{-1}\left[t_1C_S^{-1}\left(k_{ij}\,\dot{\vartheta}_{,j}\right)_{,i}-\left(t_1-t_{(0)}\right)\ddot{\vartheta}\right]\\
&=\frac{1}{2\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{t_1}{t_{(0)}}-1\right)\left[\frac{\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right)_{,p}}{\sqrt{C_S}}-\sqrt{C_S}\,\dot{\vartheta}\right]^2\right.\\
&\left.+\frac{\left[\left(K_{pq}\vartheta_{,q}\right)_{,p}\right]^2}{C_S}+t_1k_{pq}\,\dot{\vartheta}_{,p}\,\dot{\vartheta}_{,q}\right\}+\frac{1}{\theta_0}\left[k_{pq}\,\dot{\vartheta}_{,p}\,\dot{\vartheta}_{,q}+C_S\left(t_1-t_{(0)}\right)\ddot{\vartheta}^2\right]\\
&-\frac{1}{\theta_0}\left[\frac{t_1-t_{(0)}}{t_{(0)}}r\,\ddot{\vartheta}+\frac{t_1}{t_{(0)}}\left(C_S^{-1}r\right)_{,i}k_{is}\,\dot{\vartheta}_{,s}\right]-\frac{1}{\theta_0}\left[\left(\dot{\vartheta}+t_1\,\ddot{\vartheta}-\frac{t_1}{t_{(0)}}\frac{r}{C_S}\right)k_{is}\,\dot{\vartheta}_{,s}\right]_{,i}.
\end{aligned}
\tag{1.3.83}
$$

أخيرًا ، دمج المعادلة (1.3.74) و (1.3.83) على B ، باستخدام نظرية التباعد ، وإلغاء من هذه المعادلات تكامل الحجم الذي يحتوي على المعامل A_{ij} ، نحصل على قانون التوازن العالمي التالي من حيث (Sij، ϑ):

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_B p^{-1}S_{ik,k}S_{ij,j}\,d\upsilon+\frac{1}{2}\int_B \tilde{K}_{ijkl}\,\dot{S}_{ij}\,\dot{S}_{kl}\,d\upsilon\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\theta_0}\int_B\left\{\frac{t_1-t_{(0)}}{t_{(0)}}\left[\frac{\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right),_p}{\sqrt{C_S}}-\sqrt{C_S}\,\dot{\vartheta}\right]^2+\frac{\left[\left(k_{pq}\vartheta_{,q}\right),_p\right]^2}{C_S}+t_1k_{pq}\,\dot{\vartheta}_{,p}\,\dot{\vartheta}_{,q}\right\}d\upsilon\right\}$$

$$+\frac{1}{\theta_0}\int_B\left[K_{pq}\,\dot{\vartheta}_{,p}\,\dot{\vartheta}_{,q}+C_S\left(t_1-t_{(0)}\right)\ddot{\vartheta}^2\right]d\upsilon$$

$$=\int_{\partial B}p^{-1}n_i\,\dot{S}_{ij}\,S_{jk,k}da+\int_B\dot{S}_{ij}\left[\left(p^{-1}b_{(i}\right),_{j)}-\frac{t_1}{t_{(0)}}\frac{\dot{r}}{C_S}A_{ij}\right]d\upsilon$$

$$+\frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}n_i k_{is}\,\dot{\vartheta}_{,s}\left(\dot{\vartheta}+t_1\ddot{\vartheta}-\frac{t_1}{t_{(0)}}\frac{r}{C_S}\right)da$$

$$+\frac{1}{\theta_0}\int_B\left[\frac{\left(t_1-t_{(0)}\right)}{t_{(0)}}r\,\ddot{\vartheta}+\frac{t_1}{t_{(0)}}\left(\frac{r}{C_S}\right),_i\,k_{is}\,\dot{\vartheta}_{,s}\right]d\upsilon.$$

(1.3.84)

نلاحظ ان :

$$\frac{t_1}{t_{(0)}}\to 1+0 for t_1\to t_0+0, \qquad (1.3.85)$$

يمكن للمرء بعد ذلك الحصول على القانون العالمي للجسم حيث $t_1=t_0>0,$ ، وكذلك بالنسبة للحالة الخاصة للجسم الحراري الكلاسيكي.

ملخص الرسالة:

تتعلق الرسالة بترموديناميك المعمم للجسم الصلب من نوع Hook ،وهي تتضمن اربعة فصول على النحو الاتي :

- الفصل الصفري : مقدمة تتضمن ما يلزمنا من الرياضيات بشكل عام ، كما تتضمن المعادلات والعلاقات الاساسية للجسم في اطار المرونة الخطية الحركية.
- الفصل الاول : يتضمن اهم المبرهنات و النتائج و الملاحظات، التي تتعلق بالترموديناميك التقليدي (تيرموديناميك Fourier).
- الفصل الثاني : يتضمن دراسة التيرموديناميك المعمم بزمن استرخاء واحد.
- الفصل الثالث : يتضمن اهم المبرهنات و النتائج و الملاحظات، التي تتعلق بالترموديناميك المعمم بزمني استرخاء.

Dissertation Summary

This dissertation concerns the generalized thermodynamics of the Hook solid body and contains the following sections :

- The first section : Contains what are needed generally from mathematics , and the fundamental equations covering the body in the form of liner relates to dynamic theory.
- The second section : contains theories ,conclusions ,and notes concerning the traditional (Fourier) thermodynamics.
- The third section : relates to the generalized thermodynamics with one relaxation time.
- The fourth section : contains important theories ,conclusion ,and notes related to the generalized thermodynamics with two relaxation time.

بطاقة المرجعية:

[1] – Gurtin,M.E and Pipkin, A.C , 1969, A general theory of heat conduction with finite wave speeds. Arch. Mech. Analysis **31** ,113-126.

[2] – Green, A.E and Lindsay, K.A , 1972, Thermoelasticity. J.Elas. **2**(1),1-7. Arch. Mech. Analysis **31** ,113-126.

[3] – Green, A.E, 1972, A note on linear thermoelasticity. Mathematika **19**,69-75.

[4] – Dyszlewicz, J, 2004, Micropolar Theory of Elasticity. Springer-Verlag , **Berlin**.

[5] - Nowacki W., Theory of Asymmetric Elasticity, Warszawa, PWN, 1986.

[6] - Ignaczak ,J and Ostoja-Starzenski,2010, M., Thermoelathticity with Finite Wave Speeds, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press.

[7]-Parkus H.: **Magnet-Thermoelasticity**. CISM Courses and Lectures No.118. Springer- Verlag Wien-New York 1972.

8-(Chandrasekharaiah, 1986, 1998; le , san, 2004; Ignaczak, 1980b , 1989a,b, 1991 ; Hetnarski and Ignaczak, 1999, 2000).

9 –(Sternberg, 1954; Boley, 1955; Boley and Weiner, 1960 ; Chirita, 1995, 2007; Ignaczak, 1998,2002; Quintanilla, 2001).

10- (Muller and Ruggeri, 1993, 1998 ; Wilma'nski, 1998).